1. *CONJUNTOS NUMÉRICOS*

1.1. *INTRODUÇÃO*

Uma exposição sistemática dos conjuntos numéricos, utilizados na Matemática, pode ser feita a partir dos números usados para contar, chamados de *números naturais*. Estes números são conhecidos há tantos milênios que o famoso matemático Kronecker disse: “Deus criou os números naturais, todo o resto é obra do homem.”

A idéia do número *zero* só apareceu mais tarde, tendo sido introduzido pelos hindus. Uma notação para o mesmo surgiu a partir do século XI quando foi difundido e adotado o sistema de numeração decimal hindu. Este fato foi extremamente importante para a universalização da Matemática na sua forma escrita, uma vez que os seus símbolos são hoje lidos e compreendidos em quase toda parte do mundo. Apesar de historicamente o *zero* não ser um número “natural” (no sentido de usado para contar), incluir ou não o zero como número natural é uma questão de preferência pessoal ou então, de conveniência. Faremos, portanto, a nossa escolha. Usando a simbologia moderna de conjunto:

$$\boldsymbol{N} = \{ 0, 1, 2, 3,...\}$$

Da ampliação de $\boldsymbol{N}$ para um conjunto “maior”, onde fosse possível a solução de equações do tipo $x + 3 = 2$, por exemplo, surgiram os números negativos, posteriormente incorporados ao conjunto dos números *inteiros*. Dessa forma, temos:

$$Z = \{ ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Vale a pena ressaltar que os números negativos já foram chamados de “*numeri absurdi*” e “*numeri ficti*” e só a partir do século XVI foram incorporados à condição de números por algebristas italianos e, mais tarde, no século XIX, agrupados para formar o conjunto Z.

Os números negativos tiveram uma aceitação relativamente recente. No entanto, problemas envolvendo frações já eram resolvidos pelos babilônios e egípcios, levados pelas necessidades básicas do dia a dia, muitos séculos antes de Cristo. O papiro egípcio Ahmes (ou Rhind) data de 1700 AC e contém, dentre outros, problemas envolvendo frações.

Ampliando então o conjunto dos inteiros para que fosse possível a resolução de equações do tipo 3x = 4, por exemplo, surgiram os números *racionais* que são definidos como: “números que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, sendo $p,q \in Z$ e $q \neq 0$”. Considerando Q o conjunto dos números racionais temos

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}; p,q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

Algumas observações a respeito da definição de números racionais são necessárias.

Observações

1) A definição de número racional diz: “Um número que pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, ... ”. A expressão “pode ser” está sendo utilizado aí porque existem infinitas maneiras de escrever um dado número racional. Por exemplo, usando o fato que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, temos que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$, etc.. É desejável que a definição não dependa da maneira particular escolhida para representar um número. Assim, numa primeira observação de uma expressão nem sempre podemos dizer se ela representa, ou não, um número racional.

Exemplo

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} = 2 \in \mathrm{Q}$$

2) Exigimos $q \neq 0$. Esta exigência é necessária pois q é um divisor. Para construirmos um sistema de números onde o quociente entre dois inteiros não apenas exista mas seja único, não podemos permitir a divisão por zero. Vejamos:

$$\frac{p}{q} = b \iff p = b.q, \;\; q \neq 0.$$

Fazendo $q = 0$ na segunda expressão acima, teríamos

$$p = b.0 = 0.$$

Assim, para $p \neq 0$, não existiria valor para b que tornasse a equação verdadeira e se $p = 0$, existiriam infinitos valores para b.

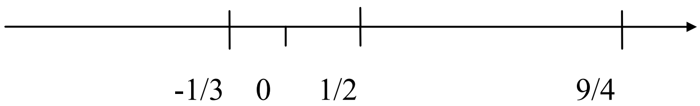
1.2. *O PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO*

A correspondência entre pontos de uma reta e números é um fato bastante natural e útil. Fazemos isso escolhendo dois pontos quaisquer e distintos de uma reta, determinando as posições do 0 e do 1, e considerando a distância entre estes dois pontos como unidade. Convenciona-se escolher o ponto 1 à direita do ponto 0 (chamado origem) de modo que os pontos à esquerda do 0 fiquem associados a números negativos. Assim, a cada ponto fica associado um número, distância do ponto à origem, juntamente com um sinal +, se o ponto estiver à direita do 0, e −, se o ponto estiver à esquerda.

É fácil constatar que todo número racional pode ser representado na reta.

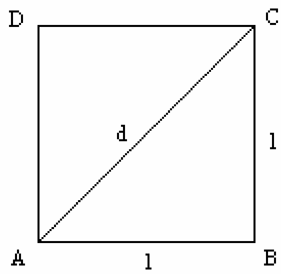
Exemplo

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{9}{4}$



Surge então uma pergunta: Será que os racionais cobrem toda a reta? Ou seja, existem pontos da reta que não representam números racionais?

A descoberta de que existem números que não são racionais foi feita pelos gregos há mais de 2500 anos. Pitágoras e seus discípulos observaram, para sua surpresa, que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário (que, de acordo com o Teorema de Pitágoras, corresponde ao número $\sqrt{2}$) não pode ser expresso como um número racional. Para os gregos esta descoberta foi responsável por uma grande crise na Matemática. De fato, em muitas de suas demonstrações eles supunham que dois segmentos AB e CD quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Este fato é equivalente a dizer que a razão dos seus comprimentos $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ é uma fração. No caso do quadrado de lado unitário e sua diagonal tem-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{1} = d$ não é um número racional.



A demonstração de que d não é um número racional é clássica, bastante intuitiva e de fácil compreensão.

Suponhamos, por absurdo, que

$$d = \frac{p}{q},\ \ p,q \in Z,\ \ q \neq 0$$

e, suponhamos que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1+1=2$, ou seja, $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Logo,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \iff p^2 = 2q^2.$$

Temos assim que p^2 é inteiro par; logo p é também par (estamos usando o fato que: p^2 par $\Rightarrow$ p par). Consideremos portanto,

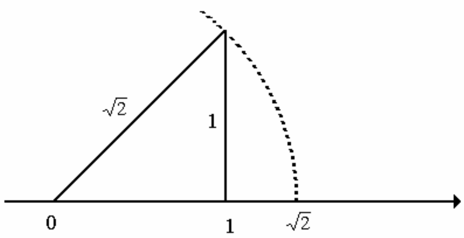
$$p = 2p_1,\ \ \ p_1 \in Z$$

Substituindo na igualdade $p^2 = 2q^2$ obtemos:

$$4p_1^2 = 2q^2 \iff 2p_1^2 = q^2$$

Usando o mesmo raciocínio anterior concluímos que q é par. Chegamos assim à conclusão que p e q são pares, o que contradiz a hipótese inicial de que p e q são primos entre si. Esta contradição mostra que nossa suposição inicial, de que d era uma fração, é falsa.

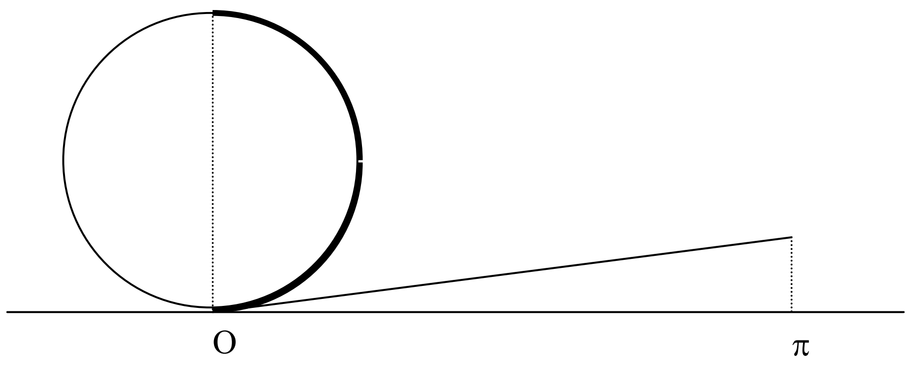
O número d, que identificamos como d = $\sqrt{2}$ não é um número racional, no entanto pode ser representado na reta!

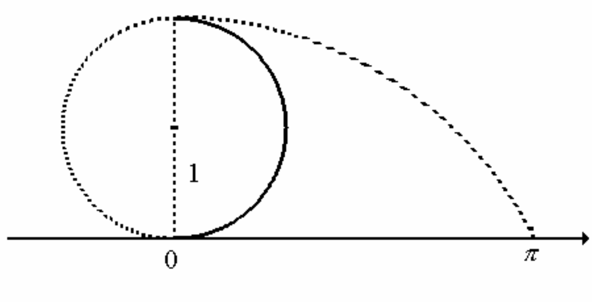


A nossa pergunta inicial fica então respondida: existem pontos da reta que não correspondem a números racionais.

Existem outros números (na verdade uma infinidade) que não são racionais e podem ser representados na reta. Por exemplos, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, etc. (A prova de que π não é racional foi dada por Lambert em 1701).

Podemos fazer a representação de π na reta considerando uma semi-circunferência de raio unitário e "retificando-a". O comprimento do segmento correspondente é π.





Estamos prontos, portanto, para definir dentro do nosso ponto de vista "intuitivo" um dos mais importantes conjuntos para a Matemática .

Por números *reais* entendemos a coleção de todos os números associados a todos os pontos da reta. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um dos seus pontos é chamada de *reta real*. Qualquer número real que não é racional diz-se *irracional*, ou seja, não pode ser escrito como a razão entre dois inteiros. Usaremos Q' para representar o conjunto dos números irracionais. Temos que

$$Q' = R - Q; \quad R = Q' \cup Q \quad \text{e} \quad Q' \cap Q = \varnothing.$$

Além disso,

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}.$$

Observações

1) O conjunto dos números irracionais é infinito. Podemos mostrar, por exemplo, que $1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2},\ \ldots$ são números irracionais. Pode ser provado também que na realidade, o conjunto dos números racionais é muito "pequeno" comparado com o conjunto dos números irracionais.

2) De uma certa forma a construção dos conjuntos numéricos pode ser vista levando em conta a necessidade de resolver equações que aparecem naturalmente em problemas aplicados. Observemos, por exemplo, que se conhecemos apenas o conjunto dos racionais, como podemos resolver uma equação do tipo $x^2 - 2 = 0$? Assim, podemos pensar no conjunto dos reais como uma ampliação de Q. (Devemos lembrar, entretanto, que os números que satisfazem a certos tipos de equações como a citada anteriormente ainda não cobrem *R* como comentaremos adiante). Desta maneira, partindo de *N*, os conjuntos são ampliados na ordem *N, Z, Q e R*. No entanto, historicamente, como vimos, o aparecimento dos números, hoje elementos de tais conjuntos, não respeita esta cronologia.

3) Na linguagem diária, a palavra *irracional* significa algo desprovido de bom senso, contrário à razão. O significado matemático da palavra racional se refere à razão, o quociente de números inteiros; irracional portanto, se refere à ausência de tal razão. O

termo *números reais* é uma outra herança do passado e também não consideramos irreais números que não são reais.

Existe uma outra divisão dos números reais, muito mais recente, em duas categorias: *algébricos e transcendentes* .

Um número real diz-se *algébrico* se satisfaz alguma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

com coeficientes inteiros. Se um número não for algébrico é chamado de *transcendente*.

Exemplos

1) Todo número racional é algébrico. De fato:

$$x = \frac{p}{q} \;\Rightarrow\; qx = p \;\Rightarrow\; qx - p = 0, \quad (p, q \in Z, q \neq 0).$$

2) $\sqrt{2}$ é algébrico.

$\sqrt{2}$ satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$.

3) Os números π e e são transcendentes. A transcendência de π foi provada por Lindemann em 1882 e a transcendência de *e* por Hermite em 1873.

Existem portanto duas classificações para os números reais que são:

$$\text{Reais}\begin{cases}\text{racionais} & \text{(todos são algébricos)}\\ \text{irracionais} & \begin{cases}\text{algébricos}\\ \text{transcendentes}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{Reais}\begin{cases}\text{algébricos} & \begin{cases}\text{racionais}\\ \text{irracionais}\end{cases}\\ \text{transcedentes} & \text{(todos são irracionais)}\end{cases}$$

1.3. *O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS*

R **é um corpo**

Estamos tão acostumados a operar com números reais que usamos vários resultados muitas vezes sem nos preocuparmos com o porquê. Por exemplo,

$$x.0 = 0,\ \forall x \quad \text{e} \quad x.y = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0.$$

As justificativas para as afirmações anteriores (e para muitas outras) seguem do fato do conjunto dos números reais ser um *corpo*, isto é, no conjunto dos números reais estão definidas duas operações, a de adição e a de multiplicação que satisfazem os seguintes axiomas:

Dados $x, y \in R$,

C_1) Comutatividade

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x.y = y.x$$

C_2) Associatividade

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x.y).z = x.(y.z)$$

C_3) Distributividade

$$x.(y + z) = x.y + x.z$$

C_4) Existência de Elementos Neutros

$$\exists\ 0 \in R;\ x + 0 = x \quad \text{e} \quad \exists\ 1 \in R;\ x.1 = x \quad \forall x \in R$$

C_5) Existência de Elementos Inversos

$$\forall x \in R,\ \exists -x \in R;\ x + (-x) = 0$$

($-x$ é chamado de inverso aditivo ou simétrico de x)

$$\forall x \in R, \ (\ x \neq 0\ )\ \exists\ \frac{1}{x} \in R;\ x.\frac{1}{x} = 1$$

($\frac{1}{x}$ é chamado de inverso multiplicativo de x).

Observação

Devido à propriedade associativa, é conveniente denotar por $x + y + z$ (sem parêntesis) a soma $(x + y) + z$ ou $x + (y + z)$ e por $x.y.z$ o produto $(x.y).z$ ou $x.(y.z)$.

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares de manipulação com os números reais.

Exemplos

1) $\forall x \in R,\ x.0 = 0$

D] De acordo com C_4 e C_3, temos

$$x.0 = x(0+0) = x.0 + x.0$$

e, portanto,

$$x.0 = x.0 + x.0$$

Somando $-(x.0)$ em ambos os membros temos:

$$(x.0) + (-(x.0)) = (x.0) + (x.0) + (-(x.0))$$

Utilizando C_5, obtemos

$$0 = x.0$$

2) $x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

D] Suponhamos $x.y = 0$ e $y \neq 0$. Vamos mostrar que $x = 0$. De fato:

$$y \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\ \frac{1}{y} \text{ tal que } y \cdot \frac{1}{y} = 1$$

Logo, multiplicando $x.y = 0$ por $\frac{1}{y}$ e usando a associatividade, obtemos

$$x \cdot (y \cdot \frac{1}{y}) = 0 \cdot \frac{1}{y}$$

Usando C_4 e C_5 e o resultado anterior podemos concluir que $x = 0$.

3) Regras de sinais

i) $-(-x) = x$ (o simétrico do simétrico de x é x)

De fato: A expressão de C_5 que por C_1 é dada por $(-x) + x = 0$, significa que o simétrico de $-x$ é x, ou seja $-(-x) = x$.

ii) $x.(-y) = -(x.y) = (-x).y$

D]

$$x.y + x(-y) \overset{C_3}{=} x.(y + (-y)) \overset{C_5}{=} x.0 = 0$$

Logo, o simétrico de $x.y$ é $x.(-y)$, ou seja, $-(x.y) = x.(-y)$.

iii) $(-x).(-y) = x.y$

D]

$$(-x).(-y) \overset{(ii)}{=} (-(-x).y) \overset{(ii)}{=} -(-(x.y)) \overset{(i)}{=} x.y$$

Em particular, $(-1).(-1) = 1$.

A partir dos axiomas citados definimos *diferença* e *divisão* como a seguir.

Dados $x, y \in R$,

1) $x - y = x + (-y)$

2) $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}, \quad y \neq 0$

Exemplo

Vamos resolver a equação $-3x+1=4$, observando os axiomas de corpo envolvidos na resolução.

$$-3x+1=4 \Leftrightarrow (-3x+1)+(-1)=4+(-1) \overset{C_2}{\Longleftrightarrow} -3x+(1+(-1))=3 \Longleftrightarrow$$

$$\overset{C_5}{\Longleftrightarrow} -3x+0=3 \overset{C_4}{\Longleftrightarrow} -3x=3 \Longleftrightarrow (-\frac{1}{3})((-3).x)=(-\frac{1}{3}).(3) \overset{C_2}{\Longleftrightarrow} ((-\frac{1}{3}).(-3)).x=-(\frac{1}{3}.3) \Longleftrightarrow$$

$$\overset{C_5}{\Longleftrightarrow} 1.x=-1 \Longleftrightarrow x=-1$$

R é ordenado

Dados dois números reais a e b, quando dizemos que a é menor que b e usamos o símbolo $a < b$, imaginamos logo que, na representação na reta, a e b ocupam posições tais que a está à esquerda de b. Para quaisquer dois números reais a e b é sempre possível decidir qual é representado na reta à esquerda (ou à direita) do outro. Isto decorre do fato que R é um corpo *ordenado*.

Vamos assumir que todo número que está à direita do zero é dito *positivo*, isto é, existe um subconjunto que indicaremos por R_+^* chamado de conjunto dos *números reais positivos*. Podemos então, introduzir o conceito de ordem em R: R_+^* satisfaz aos seguintes axiomas (ou postulados) chamados de axiomas de ordem:

O_1: A soma e o produto de números reais positivos são positivos, ou seja,

$$x, y \in R_+^* \Rightarrow x+y \in R_+^* \quad \text{e} \quad x.y \in R_+^*$$

O_2: Dado $x \in R$, exatamente uma das alternativas seguintes ocorre:

$$\text{i) } x = 0\,; \qquad \text{ii) } x \in R_+^*\,; \qquad \text{iii) } -x \in R_+^*$$

Indiquemos: $R_-^* = \{x; -x \in R_+^*\}$; $R_+ = R_+^* \cup \{0\}$ e $R_- = R_-^* \cup \{0\}$.

O axioma O_2 diz que

$$R = R_+^* \cup R_-^* \cup \{0\}.$$

Conseqüência: Para todo $x \in R$, com $x \neq 0$, temos que $x^2 \in R_+^*$

Com efeito,

$$x \in R_+^* \overset{O_1}{\Longrightarrow} x.x = x^2 \in R_+^*$$

$$x \in R_-^* \overset{O_2}{\Longrightarrow} -x \in R_+^* \overset{O_1}{\Longrightarrow} (-x).(-x) = x^2 \in R_+^*$$

O símbolos $<$ (menor que); $\leq$ (menor ou igual a); $>$ (maior que); $\geq$ (maior ou igual a) são definidos como segue:

1) $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo

2) $a \leq b \Leftrightarrow b - a$ é positivo ou $a = b$

3) $a > b \Leftrightarrow a - b$ é positivo

4) $a \geq b \Leftrightarrow a - b$ é positivo ou $a = b$

Expressões dos tipos $x < y$, $x \leq y$, $x > y$, $x \geq y$ são chamadas de desigualdades.

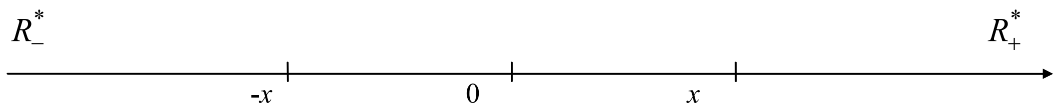
Observações

1) Em particular,

$$x > 0 \Leftrightarrow x - 0 \text{ é positivo} \Leftrightarrow x \in R_+^*$$

$$x < 0 \Leftrightarrow 0 - x \text{ é positivo} \Leftrightarrow -x \in R_+^* \Leftrightarrow x \in R_-^*$$

Os números $x \in R_{-}^{*}$ são chamados de números negativos.



2) A relação de ordem, apresentada em *R*, não pode ser estendida, por exemplo, para os números complexos, de maneira a ser compatível com a soma e o produto.

3) O conjunto *R* não é o único corpo ordenado. Por exemplo, *Q* também é um corpo ordenado.

Valem as seguintes propriedades da relação de ordem em *R*:

P_1) Transitividade

$$\text{Se} \quad x < y \;\; \text{e} \;\; y < z \quad \text{então} \quad x < z$$

D] $x < y$ e $y < z \;\Rightarrow\; y - x > 0$ e $z - y > 0 \;\Rightarrow\; (y - x) + (z - y) > 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; z - x > 0 \;\Rightarrow\; x < z.$

P_2) Tricotomia

Dados x e y $\in R$ ocorre exatamente uma das alternativas

$$x = y \quad \text{ou} \quad x < y \quad \text{ou} \quad y < x.$$

D] Dados $x, y \in R$ temos por O_2 que:

$$x - y = 0 \quad \text{ou} \quad x - y \in R_{+}^{*} \quad \text{ou} \quad -(x - y) \in R_{+}^{*}$$

logo,

$$x - y = 0 \;\Rightarrow\; x = y$$

ou

$$x - y \in R_{+}^{*} \;\Rightarrow\; x - y > 0 \;\Rightarrow\; x > y$$

ou

$$-(x - y) \in R_{+}^{*} \;\Rightarrow\; -x + y \in R_{+}^{*} \;\Rightarrow\; -x + y > 0 \;\Rightarrow\; y > x$$

P_3) Monotonicidade da Adição

Se $x < y$ então para todo $z \in R$ tem-se $x + z < y + z$

D] $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y - x + z - z > 0 \Rightarrow (y + z) - (x + z) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y + z > x + z.$

P_4) Monotonicidade da Multiplicação

i) Se $x < y$ então para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$

ii) Se $x < y$ então para todo $z < 0$ tem-se $xz > yz$

D]

i) $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow z.(y - x) > 0 \Rightarrow zy - zx > 0 \Rightarrow zy > zx$

ii) $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow -z.(y - x) > 0 \Rightarrow -zy + zx > 0 \Rightarrow zx > zy$

Consequência :

i) Se $x < 0$ então para todo $z > 0$ tem-se $xz < 0$

ii) Se $x < 0$ então para todo $z < 0$ tem-se $xz > 0$

Alguns comentários sobre inequações

A resolução de uma inequação com uma incógnita consiste na aplicação sucessiva das propriedades das desigualdades, que foram vistas, até se chegar a uma expressão final do tipo $x \leq c$, $x \geq c$, $x < c$ ou $x > c$.

Um dos erros mais frequentes cometidos ao se resolver uma inequação do tipo $\frac{2}{x-1} < -1$ é escrever que $\frac{2}{x-1} < -1$ equivale a $2 < (-1)(x-1)$ para $x \neq 1$. Observemos que o erro vem do fato de não sabermos o sinal de $x - 1$ (Ver propriedade P_4). Quando resolvemos uma inequação todas as etapas podem ser justificadas pelos axiomas de corpo, pelos axiomas de ordem e as propriedades decorrentes. Vejamos com mais detalhes a resolução da inequação citada acima:

$$\frac{2}{x-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < -1 + 1 \overset{C_5}{\Leftrightarrow} \frac{2}{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$$

Analisando o sinal de $x+1$ e $x-1$, concluímos que $x > -1$ e $x < 1$, ou seja, -1 < x < 1.

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de subconjuntos reais chamados *intervalos*.

1) $[a,b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$

2) $(a, b] = \{x \in R; a < x \leq b\}$

3) $[a, b) = \{x \in R; a \leq x < b\}$

4) $(a, b) = \{x \in R; a < x < b\}$

5) $(-\infty, b] = \{x \in R; x \leq b\}$

6) $(-\infty, b) = \{x \in R; x < b\}$

7) $[a,+\infty) = \{x \in R; x \geq a\}$

8) $(a,+\infty) = \{x \in R; x > a\}$

9) $(-\infty,+\infty) = R$

Observações

1) A expressão $a \leq x \leq b$ significa que $x \geq a$ e $x \leq b$, assim como, $a < x < b$ significa $x > a$ e $x < b$.

2) Os símbolos $+\infty$ (infinito positivo) e $-\infty$ (infinito negativo) não devem ser confundidos com números reais pois não obedecem as propriedades dos números reais.

3) Os quatro primeiros intervalos são *limitados* com extremos a e b.

4) $[a,b]$ é dito *intervalo fechado* e (a,b) é dito *intervalo aberto*.

5) $[a,b)$ é dito *fechado à esquerda* e $(a,b]$ é dito *fechado à direita*.

6) Quando $a = b$ o intervalo fechado $[a,b]$ reduz-se a um único elemento e chama-se intervalo degenerado.

EXERCÍCIOS

1) Determine todos os números reais que satisfazem as seguintes desigualdades:

a) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1}$

b) $\dfrac{x+1}{2+x} \geq \dfrac{x}{3+x}$

2) Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeira, prove; se falsa, dê contra-exemplo.

a) Se a e b são irracionais então ab é irracional.

b) Se a e b são irracionais então a + b é irracional.

c) Se a é irracional e b é racional não nulo então ab é irracional.

d) Se a, b, c e d são racionais e α é irracional então

$$a + b\alpha = c + d\alpha \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

3) Mostre que os números da forma $m+\sqrt{2}$, $m \in Z$, são irracionais.

4) Dados x, y, z , w $\in R$, prove que:

a) Se $x < y$ e $z < w$ então $x + z < y + w$.

b) Se $x > 0$ então $\dfrac{1}{x} > 0$.

c) Se $0 < x < y$ então $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

d) Se $x > y \geq 0$ então $x^2 > y^2$.

e) Se $x > 0$, $y \geq 0$ e $x^2 > y^2$, então $x > y$.