10. A ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES

Neste capítulo veremos as operações de soma, produto e quociente de funções reais. É freqüente na Matemática o uso dessas operações.

Definições

Dados conjuntos quaisquer A e B tais que $I = A \cap B \neq \emptyset$ e funções $f: A \to R$ e $g: B \to R$ temos

1. A soma de f e g é a função $f + g: I \to R$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

2. O produto de f e g é a função $f \cdot g: I \to R$ tal que $(f \cdot g)(x) = f(x).g(x)$.

3. O quociente de f por g é a função $f/g: J \to$ R, onde $J = \{ x; x \in I$ e $g(x) \neq 0 \}$ dada por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Exemplos

1) Vale destacar os seguintes casos particulares:

- Se $A = B$ e f é a função constante $f(x) = 1$, então o quociente de f por g é dada por $(1/g)(x) = 1/g(x)$, definida no conjunto $\{ x \in B; g(x) \neq 0 \}$. Considerando-se, por exemplo, $g(x) = x - 1$ então $(1/g)(x) = 1/(x-1)$ e possui domínio igual a R - {1}.
- Se $A = B$ e $g(x) = k$, $k \in$ R, é uma função constante então a soma e o produto de f e g são respectivamente:

$$\begin{aligned} f + k: A &\to R \\ x &\to x + k \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} k.f: A &\to R \\ x &\to k.x \end{aligned}$$

Tomando-se, por exemplo, $f(x) = x^3$ então teremos $f(x) - 2 = x^3 - 2$ e $5f(x) = 5.x^3$.

2) Sejam as funções $f(x) = x - 9$ e $g(x) = \sqrt{x} - 3$. Então,

$$(2.f - g)(x) = 2.f(x) - g(x) = 2x - 18 - \sqrt{x} + 3$$

e

$$(f \cdot g)(x) = f(x).g(x) = x.\sqrt{x} - 3x - 9\sqrt{x} + 27.$$

Como o domínio de f é R e o de g é R_+, o domínio de cada uma dessas funções é $R_+ = R_+ \cap R$.

Tomando-se $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x - 9) / (\sqrt{x} - 3) = \sqrt{x} + 3$, temos que

$(f/g)(x) = \sqrt{x} + 3$ cujo domínio é $R_+ - \{9\}$.

Observe que neste exemplo f/g não é igual à função de variável real "$\sqrt{x} + 3$" cujo domínio é R_+.

Ilustremos com a seguinte aplicação:

3) Durante as férias dos meses de dezembro e janeiro, estudantes resolveram coletar e vender material usado para reciclagem de vidro e de plástico. Ao final de dezembro, após contatos com pessoas do bairro e fábricas de reciclagem, conseguiram coletar diariamente 300 quilogramas de vidro, que eram vendidos a R\$0,40 o quilo, e 200 quilogramas de plástico, vendidos a R\$ 0,50 o quilo.

No mês de janeiro, ampliando seus contatos, conseguiram aumentar a coleta de vidro em 10 quilos por dia. Entretanto como muitas garrafas eram coletadas, o preço de venda do quilo de vidro foi reduzido em R\$0,01 por dia. Também no mês de janeiro, aumentaram a coleta de plástico em 5 quilos por dia, material cujo preço de venda foi mantido constante durante esses dois meses.

Para o mês de janeiro temos:

- Representemos a quantidade diária de vidro coletada pelos estudantes, em função do dia x do mês, pela função

$$Q_1(x) = 300 + 10.x$$

- O preço de venda do quilo do vidro, em função de x, pode ser dado por

$$P_1(x) = 0{,}40 - 0{,}01.x$$

- O Lucro diário obtido com a venda do vidro pode ser dado como produto das duas funções Q_1 e P_1. Isto é, dado pela função L_1 tal que

$$L_1(x) = Q_1(x).\ P_1(x) = (300 + 10.x).(0{,}40 - 0{,}01.x) = -0{,}1.x^2 + x + 120$$

$$\therefore \quad L_1(x) = 120 + x - 0{,}1.x^2$$

Para o plástico, de modo semelhante, temos,

- A quantidade diária coletada pelos estudantes, em função do dia x do mês, é dado por

$$Q_2(x) = 200 + 5.x$$

- O preço de venda do quilo é dado pela função constante

$$P_2(x) = 0{,}50$$

- O Lucro diário obtido com a venda do plástico é dado como produto das duas funções Q_2 e P_2. Ou seja,

$$\begin{aligned} L_2(x) = Q_2(x).\ P_2(x) &= (200 + 5.x)\ .0{,}5 \\ &= 100 + 2{,}5.x \end{aligned}$$

$$\therefore \quad L_2(x) = 100 + 2{,}5.x$$

- O Lucro diário obtido com a venda dos dois produtos é dado pela *soma* das duas funções L_1 e L_2. Ou seja,

$$L(x) = \mathrm{L}_1(x) + L_2(x) = (-0{,}1.x^2 + x + 120) + (100 + 2{,}5.x) = -0{,}1.x^2 + 3{,}5.x + 220$$

$$\therefore \quad L(x) = 220 + 3{,}5.x - 0{,}1.x^2$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Considere as funções definidas pelas sentenças a seguir:

$$f(x) = |x| \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Determine o domínio, a sentença e o gráfico das funções:

a) $f - g$ b) $f \cdot g$ c) f/g

2) Sejam f e g funções reais de variável real, mostre que:

a) f e g são funções crescentes (decrescentes) $\Rightarrow f + g$ é função crescente (decrescente).

b) f e g funções crescentes (ou decrescentes), em geral, não implica que $f \cdot g$ é crescente (ou decrescente). Dê contra-exemplos.

3) Considere o Exemplo 3) do texto.

I) a) Calcule em que dia(s) do mês de janeiro o lucro diário com a venda do vidro é máximo.

b) Calcule em que dia(s) do mês de janeiro o lucro diário com a comercialização dos dois produtos é máximo.

II) Supondo que no final de dezembro havia 30 estudantes envolvidos no trabalho, que do dia $1^{\underline{0}}$ até o dia 15 de janeiro este número sofreu um aumento de um estudante por dia e que em seguida manteve-se constante, determine:

a) A função que dá o número de estudantes envolvidos no trabalho em cada dia durante o mês de janeiro.

b) A função que dá o lucro diário de cada estudante com a venda do vidro, supondo que o lucro total do dia era distribuído igualmente entre aqueles trabalharam naquele dia.

c) Que operações entre funções você utilizou em b) ?