3. *FUNÇÃO. NOÇÕES FUNDAMENTAIS*

3.1. *INTRODUÇÃO*

Observamos, no dia a dia, que muitos objetos ou grandezas estão relacionados. Por exemplo, trabalhando com números reais estamos sempre comparando uns com outros utilizando as expressões "maior do que", "menor do que". Em nossas famílias as pessoas estão naturalmente relacionadas como "irmão de", "pai de" etc., além das comparações subjetivas: "mais inteligente do que", "mais bonita do que", "menos rico que", etc.

Matematicamente, se temos dois conjuntos A e B e podemos estabelecer uma "ligação" dos elementos de A com os elementos de B, dizemos que temos uma "relação" de A em B. Nosso interesse, entretanto, é o estudo de um tipo especial de relação que faz corresponder a cada elemento de A um único elemento de B. Tal relação é chamada *função*.

As leis que descrevem fenômenos da natureza, em que geralmente o valor de uma grandeza depende do valor de uma segunda, são funções entre conjuntos e são de grande importância nas Ciências. Vejamos alguns exemplos.

A pressão da água do mar é função da profundidade. (Nossos ouvidos sentem isso quando mergulhamos cada vez mais fundo).

A lei da queda de um corpo, descoberta por Galileu (1564-1642), afirma que o espaço percorrido por um corpo que cai é proporcional ao quadrado do tempo gasto em percorrê-lo, sendo, portanto, função do tempo.

Se um gás é encerrado num certo recipiente e mantido a uma temperatura fixa, então o produto do volume pela pressão a que o mesmo está submetido é constante, ou seja, o volume é inversamente proporcional à pressão. Essa relação entre volume e pressão de um gás é conhecida como "Lei de Boyle e Mariotte", foi descoberta em 1676, e nos diz que o volume do gás é função da pressão.

O custo de fabricação de um determinado produto é função do número de unidades fabricadas.

Vimos alguns exemplos de função em diversas áreas do conhecimento. Este é um dos motivos porque o conceito de função é fundamental. Praticamente toda a Matemática se constrói em torno deste conceito e é através de funções que as conexões da Matemática com as demais ciências se tornam bastante evidentes.

3.2. *CONCEITOS FUNDAMENTAIS*

Vejamos agora a definição matemática de função.

Dados os conjuntos A e B, não vazios, uma *função f* de A em B é uma regra, ou conjunto de instruções, que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. O conjunto A chama-se *domínio* e o conjunto B *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in A$, o único elemento $y \in B$ associado a x denomina-se *imagem* de x pela função f ou o valor assumido pela função f no ponto x.

Indicamos a função f de A em B por

$$f : A \to B,$$

o domínio de f por D(f), a imagem de x pela função f, por $f(x)$ e o conjunto $\{y = f(x),\ x \in A\}$, chamado de *conjunto imagem da função f*, por Im(f).

Uma função f de A em B também pode ser indicada por

$$A \xrightarrow{f} B$$

ou

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Observações

1) As letras x e y que aparecem na expressão $y = f(x)$ são denominadas *variáveis.* O valor numérico da variável y, em geral, é determinado pelo valor de x. Por esta razão, muitas vezes, y é chamado de *variável dependente* e x variável *independente*.

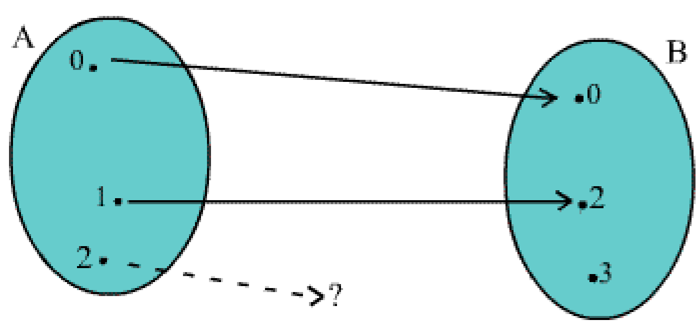
2) Em geral trabalhamos com funções $f : A \to B$, onde A e B são conjuntos numéricos e a regra $x \mapsto f(x)$ exprime o valor $f(x)$ por meio de uma expressão que envolve x. No entanto, a regra que nos ensina a obter $f(x)$, dado x, é inteiramente arbitrária, desde que cumpra as seguintes condições:

a) Se A é o domínio de f então podemos obter $f(x)$, qualquer que seja $x \in$ A .

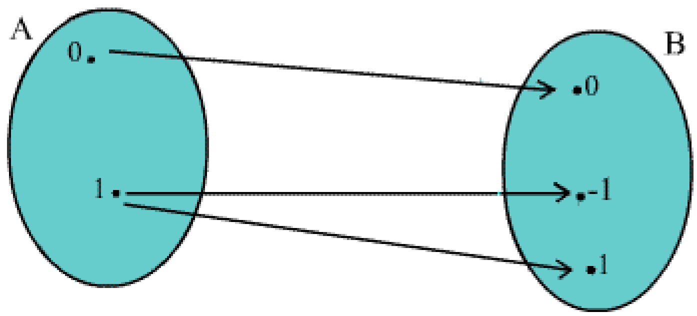
b) A cada $x \in$ A, a regra $f(x)$ deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B.

Exemplos

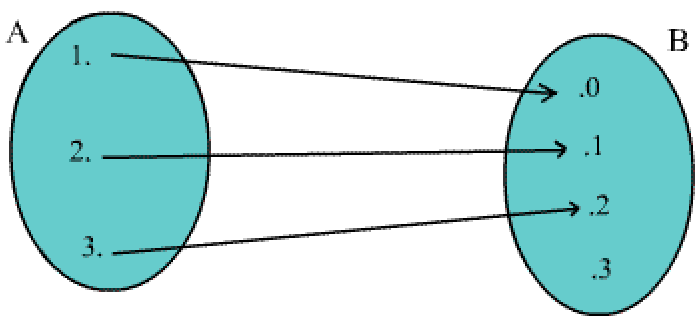
1) Sendo A = { 0, 1, 2 }, B = { 0, 2, 3 } e $f(x) = 2x$, f não é uma função de A em B pois não existe elemento $y \in$ B tal que $y = f(2)$.



2) Sejam $A = \{ 0, 1 \}$ e $B = \{ -1, 0, 1 \}$ e vamos considerar $y = f(x)$ tal que $y^2 = x$. f não é uma função de A em B pois $f(1) = 1$ e $f(1) = -1$.



3) Sejam $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ e a função $f : A \to B$ tal que, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$.



Observações

1) Devemos distinguir o significado dos símbolos x, $f(x)$ e f: f é a função, $x \in A$ e $f(x) \in B$ é a imagem do elemento x pela função f. Em alguns casos nos referimos à função f como sendo "a função *f(x)*". Por exemplo, dizemos: "a função $f(x) = \operatorname{sen} x$", "a função $f(x) = \sqrt{x}$", etc.

2) Para se definir uma função são necessários o domínio, o contra-domínio e a lei de formação $y = f(x)$. No entanto, é muito comum utilizar apenas a lei de formação para representar f. Neste caso deve-se considerar o domínio e o contra-domínio de f como

os mais amplos possíveis dentro do universo que se está trabalhando. Por exemplo, ao dizermos "a função $f(x) = \frac{1}{x}$, estamos considerando a função

$$\begin{aligned} f: R^* &\to R \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}.$$

Vejamos alguns exemplos práticos de função dados por suas respectivas leis.

Exemplos

1) Para estudar a taxa do nível de aprendizagem dos animais, um grupo de estudantes de Psicologia fez uma experiência na qual um rato branco era enviado, repetidamente, através de um labirinto. Os estudantes notaram que o tempo requerido para o rato percorrer o labirinto, na n-ésima tentativa, era de, aproximadamente, $f(n) = 3 + \frac{12}{n}$ minutos.

2) No estudo das condições ambientais de uma comunidade, concluiu-se que a taxa média diária de monóxido de carbono do ar é de $c(p) = 0{,}4p + 1$ partes por milhão, quando a população for de p milhares.

3) Biólogos descobriram que a velocidade do sangue arterial é função da distância do sangue ao eixo central da artéria. De acordo com tal função, chamada de *Lei de Poiseuille*, a velocidade (em centímetros por segundo) do sangue, que está a r centímetros do eixo central da artéria, é dada por $s(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante e R é o raio da artéria.

4) Se uma bola é jogada de cima de um edifício com 256 metros de altura, então a altura da bola (em metros), em relação ao solo, em cada instante t (em segundos), pode ser dada pela função $h(t) = -5.t^2 + 256$, se desconsideramos a resistência do ar.

Igualdade de funções

Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$ são iguais se, e somente se, A = C, B = D e f(x) = g(x), $\forall$ x $\in$ A.

Exemplo

As funções

$$\begin{array}{rcl} f: \{\,0,\ 1,\ 2\,\} & \to & R \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} g: \{\,0,\ 1,\ 2\,\} & \to & R \\ x & \mapsto & x + 3 \end{array}$$

são iguais pois têm domínio e contra-domínio iguais e, além disso, f(0) = g(0) = 3, f(1) = g(1) = 4 e f(2) = g(2) = 5.

Por outro lado, se não especificamos os respectivos domínios de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ e $g(x) = x + 3$, fica entendido, como observamos anteriormente, que D(*f*) =*R* − {3} e D(g) = *R* e, portanto, f e g não são iguais.

Uma função $f: A \to B$ é chamada de *função real* quando $B \subset R$ e, de *variável real* quando $A \subset R$.

Exemplos

1) A área A de um círculo é função do raio r, A = π . r^2.

2) A área de um retângulo é função do seu comprimento x e de sua largura y, A = xy.

3) Os juros J de uma aplicação é função de quanto se aplica, o capital C, do tempo de aplicação t e de uma taxa estabelecida i, $J = \frac{Cit}{100}$.

Nos exemplos anteriores temos funções reais de uma, duas e três variáveis respectivamente.

Trabalharemos com funções reais de uma variável real , isto é, aquelas em que domínio e contra-domínio são subconjuntos de *R*. Como já salientamos, neste caso, se conhecemos apenas a lei de formação $y = f(x)$ fica convencionado que o domínio de f é o subconjunto de R o mais amplo possível, ou seja, o maior subconjunto de R no qual é possível determinar a imagem $f(x)$, e o contra-domínio de f é R.

3.3. O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Procuraremos sempre associar uma função à sua representação gráfica, mostrando que, através do seu gráfico, podemos fazer um estudo geral das suas propriedades.

Vejamos, inicialmente, uma breve revisão sobre o produto cartesiano.

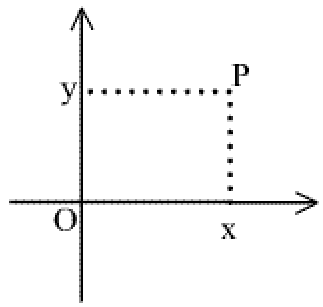
Um *par ordenado* $P = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado de *primeira coordenada* de P e um objeto y chamado de *segunda coordenada* de P. Dois pares ordenados $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ serão chamados iguais quando $x = u$ e $y = v$, isto é, quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada.

O *produto cartesiano* A x B de dois conjuntos A e B é o conjunto A x B formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que x pertence a A e y pertence a B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{ (x, y);\, x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respectivamente, então o produto cartesiano é finito e possui m.n elementos.

$R \times R = R^2$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano, sendo o exemplo que deu origem à idéia geral.



Os elementos (x, y) de R^2 são os pares ordenados de números reais. Eles são as chamadas *coordenadas cartesianas* de um ponto P do plano Π, quando se fixa neste plano um par de eixos ortogonais Ox e Oy que se interceptam no ponto O, chamado de *origem* do sistema de coordenadas. A primeira coordenada do ponto P, x, é chamada de *abscissa* e a segunda coordenada y, é chamada de *ordenada*. Os eixos Ox e Oy são chamados respectivamente de eixos das abscissas e eixo das ordenadas.

Dado um ponto P do plano, a abscissa de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo Ox, enquanto a ordenada de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre Oy. Diz-se então que (x, y) é o par de coordenadas do ponto P relativamente ao sistema de eixos xOy.

Os eixos Ox e Oy dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos. No primeiro quadrante tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro, $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Podemos associar a cada ponto P do plano Π seu par de coordenadas, através da função $f : \Pi \rightarrow \mathrm{R}^2$; $f(\mathrm{P}) = (x, y)$. Esta função traduz conceitos e propriedades geométricos para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpreta geometricamente relações entre números reais. Podemos dizer que R^2 é o modelo aritmético do plano Π enquanto que Π é o modelo geométrico de R^2.

Esta relação entre a Aritmética/Álgebra de um lado, e a Geometria de outro, permitirá um melhor entendimento das funções reais que iremos estudar.

O *gráfico* de uma função $f: A \to B$ é o subconjunto G(f) do produto cartesiano A x B formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de A e $y = f(x)$. Simbolicamente:

$$\mathrm{G}(f) = \{(x, y) \in \mathrm{AxB};\ y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in \mathrm{A}\}.$$

A fim de que um subconjunto $\mathrm{G} \subset \mathrm{AxB}$ seja o gráfico de alguma função $f: A \to B$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

G_1: Para todo $x \in$ A existe um par ordenado (x, y) $\in$ G cuja primeira coordenada é x.

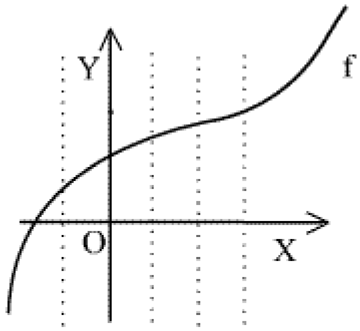
G_2: Se P = (x, y) e P'= (x, y') são pares pertencentes à G com a mesma primeira coordenada x, então $y = y'$, isto é, P = P'.

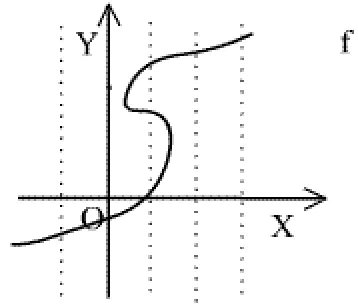
As condições G_1 e G_2 significam, em outras palavras, que para cada $x \in$ A existe um, e somente um, $y \in$ B tal que $(x, y) \in$ G.

O gráfico de uma função real de variável real $f: \mathrm{A} \to R$; $\mathrm{A} \subset R$ é um subconjunto do plano cartesiano R^2, logo, pode, em geral, ser visualizado como uma linha formada pelos pontos de coordenadas $(x, f(x))$, quando x varia no conjunto A .

No caso de funções reais de uma variável real, as condições G_1 e G_2 tomam uma forma mais geométrica podendo ser resumidas assim:

Seja $\mathrm{A} \subset R$ um conjunto que consideramos situado sobre o eixo horizontal. Um subconjunto $\mathrm{G} \subset R^2$ é o gráfico de uma função $f: \mathrm{A} \to R$, se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical traçada a partir de um ponto de A, intercepta G num único ponto.





Representa o gráfico de uma função *Não representa o gráfico de uma função*

EXERCÍCIOS

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{x-1}}$

d) $f(x) = \sqrt{-(x^2-9)^2}$

2) Para estudar a taxa do nível de aprendizagem dos animais, um grupo de estudantes de Psicologia fez uma experiência na qual um rato branco era enviado, repetidamente, através de um labirinto. Os estudantes notaram que o tempo requerido para o rato percorrer o labirinto, na n-ésima tentativa, era de, aproximadamente, $f(n) = 3 + \dfrac{12}{n}$ minutos.

a) Qual o domínio da função dada pela sentença $f(n) = 3 + \dfrac{12}{n}$?

b) Quais os valores para n que fazem sentido no contexto do problema?

c) Quanto tempo o rato gastou para percorrer o labirinto na 3^a tentativa?

d) De acordo com a função f, com o aumento do número de tentativas, que acontecerá com o tempo requerido para o rato percorrer o labirinto? O rato conseguirá percorrer o labirinto em menos de três minutos?

3) Estima-se que a população de uma certa comunidade, daqui a t anos, será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milhares.

a) Qual o domínio da função dada pela sentença $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$?

b) Daqui a 9 anos qual será a população da comunidade?

c) De quanto crescerá a população durante o 9º ano?

d) Ao longo do tempo o que acontecerá com essa população?

4) A mudança de temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio ambiente (considerada constante) . Expresse essa mudança como função da temperatura do objeto.

5) A média de propagação de uma epidemia é proporcional ao número de pessoas que estão com a doença e ao número de pessoas que não estão doentes. Expresse essa média em função do número de pessoas que estão doentes.

(*Obs. Uma grandeza* $\underline{z}$ *é dita diretamente proporcional a duas outras grandezas* $\underline{w}$ *e* $\underline{u}$ *se* $z=k.(w.u)$ *para algum* $k \in R$*)*