4. *A FUNÇÃO AFIM*

Uma função $f : R \to R$ chama-se *afim* quando existem números reais a e b tais que $f(\text{x}) = \text{a}x + \text{b}$ para todo $x \in R$.

Casos particulares

1) A função *identidade* $f\!:\!R \to R$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \text{R}$.

2) A função linear $f\!: R \to R$ definida por $f(x) = \text{a}x$ para todo $x \in R$.

3) A função *constante* $f : R \to R$ definida por $f(x) = \text{b}$ para todo $x \in R$.

Observações

1) Quando $\text{a} \neq 0$, a função afim também é chamada *função polinomial do primeiro grau.*

2) Devido ao fato que b = $f(0)$ na expressão $f(x) = \text{a}x + \text{b}$, o coeficiente b é às vezes chamado de *valor inicial* da função f.

3) A função linear dada por $f(x) = \text{a}x$ é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Exemplos

1) Se um corpo se desloca em linha reta com velocidade constante v_o, então $s(t) = v_o t + s_o$ dá a posição s do corpo em relação à uma origem fixa na reta, onde s_o é a posição para $t = 0$.

2) Se uma pessoa fica exposta a temperaturas muito baixas (ou muito altas), durante algumas horas, a temperatura de seu corpo pode cair (ou subir), e tal pessoa pode, inclusive, vir a morrer. Todavia, sob temperaturas ambientes de 16°C a 54° C, nosso corpo é capaz de manter, indefinidamente, uma mesma temperatura. Este fato pode ser representado pela seguinte função constante: $f\colon [16,54] \to R$; $f(x) = 36{,}7$.

3) Pendurando-se um corpo numa mola, ela sofrerá um alongamento S, que é função do peso *p* do corpo suspenso. Em 1660 o inglês Hooke descobriu experimentalmente que, dentro de certas condições, tal função é linear, isto é, dada por S = k*p*, onde k é uma constante que depende da mola.

4) Em modelos simplificados, o *custo* de fabricação de *x* unidades de um produto é composto por uma despesa fixa, chamada de *custo fixo*, mais uma parte variável que depende do número de unidades produzidas. Assim, se o fabricante de um determinado produto tem uma despesa fixa mensal de c_o reais e um custo de produção de a reais por unidade, o custo de produção de *x* unidades mensais deste produto é dado por $C(x) = ax + c_o$ reais.

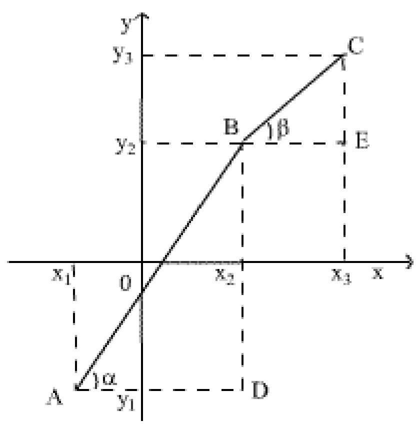
Apesar de termos definido a função afim e seus casos particulares como funções de domínio *R*, nos exemplos que vimos, que são situações práticas, os domínios considerados são subconjuntos de *R*. As respectivas funções são, na verdade, *restrições* da função afim a esses subconjuntos.

O gráfico da função afim

Podemos verificar que dados três pontos distintos do gráfico da função afim, esses pontos são colineares, ou seja, tal gráfico é uma reta. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos distintos do gráfico de $f(x) = ax + b$. Podemos supor que $x_1 < x_2 < x_3$ e sabemos que $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = a x_2 + b$ e $y_3 = a x_3 + b$. Daí obtemos,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$$

Se $a > 0$, $y_2 > y_1$ e $y_3 > y_2$, podemos ter a seguinte figura



Os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e portanto os ângulos α e β são iguais. Logo, A, B e C estão alinhados.

Se $a < 0$ o raciocínio é análogo.

Se $a = 0$ temos que $y_1 = y_2 = y_3$ teremos os pontos A, B e C alinhados e sobre uma reta paralela ao eixo Ox, que é o gráfico da função constante.

Conclusão: Para construir o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é suficiente encontrar dois pontos distintos do gráfico e traçar a reta que passa por esses pontos.

O gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo Oy. Reciprocamente, podemos provar que toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.

Se $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, diz-se que $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ é a equação da reta r .

Se a reta r é o gráfico da função afim $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, o coeficiente $\mathrm{a} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r, é chamado *inclinação* ou *coeficiente angular* da reta r, pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo θ que a reta r faz como eixo Ox.

$$\mathrm{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \mathrm{tg}\theta$$

Uma vez que o ponto (0, b) corresponde ao ponto que a reta r intercepta o eixo Oy, o número b é também chamado de *coeficiente linear* da reta r.

Chama-se *zero* de uma função f, o ponto x, $x \in \mathrm{D}(f)$ tal que $f(x) = 0$.

Se f:A $\to$R, com A $\subset$ R, então graficamente o ponto $(x, f(x))$ tal que $f(x) = 0$ representa a interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

No caso da função afim , se $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ o zero de f é o ponto $x = -\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$, se $\mathrm{a} \neq 0$.

Se a = 0 temos dois casos: a função não tem zero (para b $\neq$ 0) ou tem infinitos, se b = 0.

EXERCÍCIOS

1) Sabe-se que se um corpo se desloca em linha reta com velocidade constante v_o, então $s(t) = v_o t + s_o$ dá a posição s do corpo em relação à uma origem fixa na reta, onde s_o é a posição para $t = 0$. Numa longa estrada retilínea, um Gol e um Passat deslocam-se no mesmo sentido com velocidades constantes de 80km/h e 60km/h, respectivamente No instante $t = 0$, o Gol está no quilômetro 5 e o Passat no quilômetro 20.

a) Qual a lei que representa a posição do Gol? E do Passat?

b) Construa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções encontradas no item a). Existe interseção? Qual o significado disto no problema?

c) Refaça o problema com os carros a 80km/h e 60km/h mas em sentidos contrários, numa estrada de mão dupla. Interprete o ponto de interseção dos gráficos.

2) A medida de temperatura em graus Fahrenheit é uma função afim da medida em graus centígrados. Escreva a equação desta função sabendo que 0°C = 32°F e 100°C = 212°F.

3) Durante o verão, um grupo de estudantes alugou um quarto para confeccionar produtos de artesanato. O preço do aluguel foi de R\$100,00 e o custo do material necessário para cada produto foi de R\$1,50. Expresse o custo total em função do número de produtos confeccionados.

4) O aluguel de um carro em uma agência é de R\$ 50,00 mais R\$ 0,80 por quilômetro rodado. Uma segunda agência cobra R\$ 60,00 mais R\$ 0,40 por quilômetro rodado. Qual a agência que oferece o melhor preço de aluguel?

5) O herói de uma história popular de espionagem conseguiu fugir após ter sido aprisionado por inimigos. Nosso herói, dirigindo um caminhão roubado a 72km/h está a 40km de distância de seus inimigos. Estes, ao perceberem a fuga, tentarão alcançá-lo

dirigindo um carro a 168km/h. A distância entre o lugar onde o herói esteve prisioneiro e a fronteira da liberdade é de 83,8km. Poderá nosso herói alcançá-la?

6) Um indivíduo dispara um projétil com velocidade de 200m/s sobre um alvo. Ele ouve o impacto do projétil no alvo, 2,7 segundos depois do disparo. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é de 340m/s, qual a distância do indivíduo ao alvo?

7) Para encorajar pessoas ao uso do sistema de transporte solidário, o Departamento de Trânsito de um Estado ofereceu um desconto especial no pedágio para veículos transportando 4 ou mais pessoas. Há trinta dias, durante o horário matinal de maior movimento de carros, apenas 157 veículos obtiveram o desconto. Desde então, o número de veículos com direito ao desconto aumentou numa razão constante. Hoje, por exemplo, 247 veículos receberam o desconto.

a) Expresse o número de veículos com direito a desconto, em cada manhã, como função do tempo e construa o gráfico correspondente.

b) Daqui a 14 dias, quantos veículos terão direito ao desconto?

8) Os produtos farmacêuticos devem especificar as dosagens recomendadas para adultos e crianças. Duas fórmulas de modificação da dosagem de adulto para uso por crianças são:

$$\text{Regra de Cowling:}\quad y = \frac{1}{24}(t+1)a$$

$$\text{Regra de Friend:}\quad y = \frac{2}{25}ta$$

onde *a* denota a dose de adulto (em miligramas) e *t* a idade da criança (em anos).

a) Se $a = 100$, faça o gráfico das duas equações, no mesmo sistema de eixos, para $0 \le t \le 12$.

b) Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?

9) O manual de Imposto de Renda de 1997 estabeleceu as seguintes regras para cálculo do imposto

RENDA LÍQUIDA	ALÍQUOTAS	PARCELA A DEDUZIR
Até 10.800,00	Isento	
Acima de 10.800,00 até 21.600,00	15 %	1.620,00
Acima de 21.600,00	25 %	3.780,00

Isso significa que o Imposto de Renda a pagar é uma função da renda líquida x expressa por

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 10.800 \\ 0{,}15x - 1.620, & \text{se } 10.800 < x \leq 21.600 \\ 0{,}25x - 3.780, & \text{se } x > 21.600 \end{cases}.$$

Construa o gráfico dessa função.