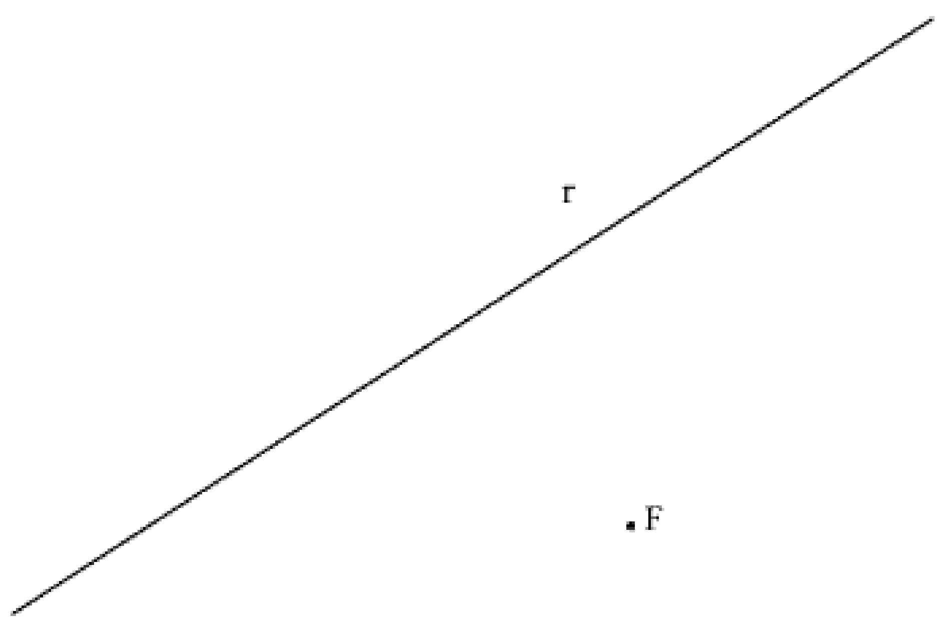
6. *FUNÇÃO QUADRÁTICA*

6.1. *CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES*

Na figura abaixo, seja a reta r e o ponto F de um determinado plano, tal que F não pertence a r. Consideremos as seguintes questões:

- Podemos obter, nesse plano, um ponto cuja distancia a F seja igual a sua distância a r?
- Existem outros pontos com essa propriedade?
- Como determinar todos esses pontos?



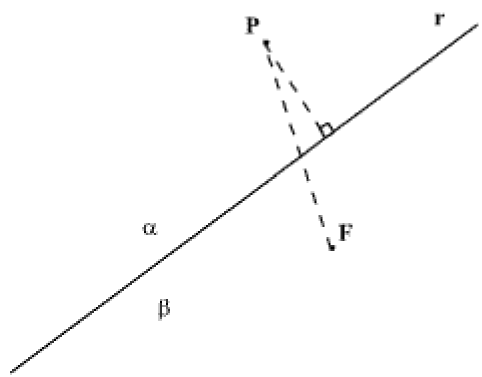
É fácil ver que a resposta às duas primeiras perguntas é afirmativa.

O conjunto de todos esses pontos é uma curva que chamamos de *parábola*.

Para responder à terceira pergunta veremos uma construção com régua e compasso de uma parábola:

Usaremos a notação $d(P,F)$ e $d(P,r)$ para indicar as distâncias de um ponto P a um ponto F e de um ponto P a uma reta r, respectivamente.

Consideramos os semi-planos α e β determinados por r, tal que $F \in \beta$ (Ver figura ao lado).



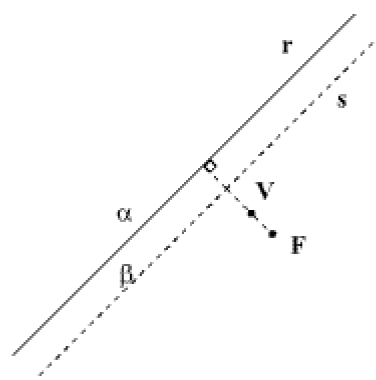
Se P é um ponto que pertence a α, então

$$d(P,F) > d(P,r),$$

o que nos garante que a parábola está contida no semi-plano β.

Seja $D = d(F,r)$. Traçando-se um segmento perpendicular à reta r, pelo ponto F, o ponto médio V deste segmento satisfaz

$$d(V,F) = d(V,r) = D/2.$$



Este ponto V pertence, portanto, à parábola. Vejamos os demais.

Consideremos uma reta s, paralela a r, contida no semi-plano β.

Se $d(r,s) < D/2$, é fácil observar que para todo $\forall P \in$ s, $d(P,F) > d(P,r)$.

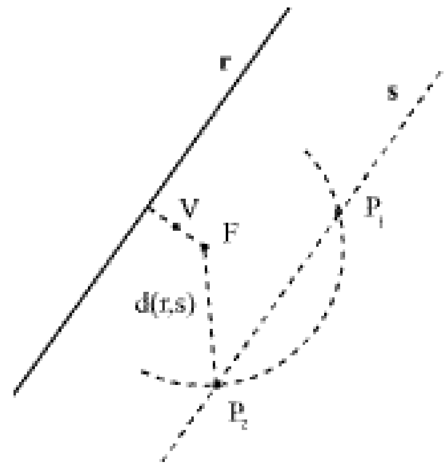
Se $d(r,s) > D/2$, s contém exatamente dois pontos, P_1 e P_2, da parábola que podem ser obtidos da seguinte forma. Centralizamos em F um compasso com abertura igual à distancia de r a s. Marcamos assim dois pontos P_1 e P_2 em s tais que

$$d(P_1, F) = d(P_1, r)$$

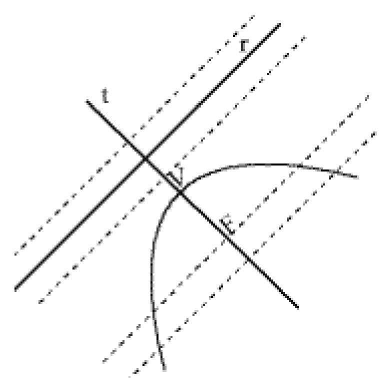
e

$$d(P_2, F) = d(P_2, r)$$

(Ver figura ao lado)



Os pontos P_1 e P_2 são simétricos em relação à reta t (perpendicular a r passando por F). Quanto mais s se afasta de V, mais os pontos obtidos se afastam de r e de t.



São elementos da parábola:

O foco da parábola: ponto fixo F.

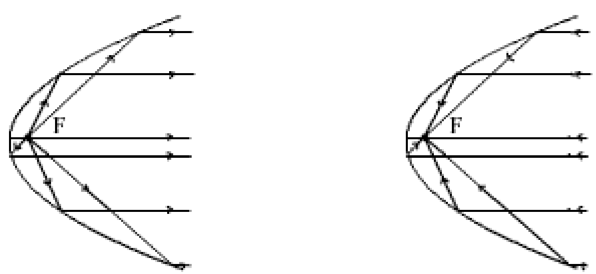
A diretriz da parábola: a reta fixa r.

O eixo de simetria da parábola: reta t, perpendicular a r, passando por F.

O vértice da parábola: ponto V, interseção de t com a parábola.

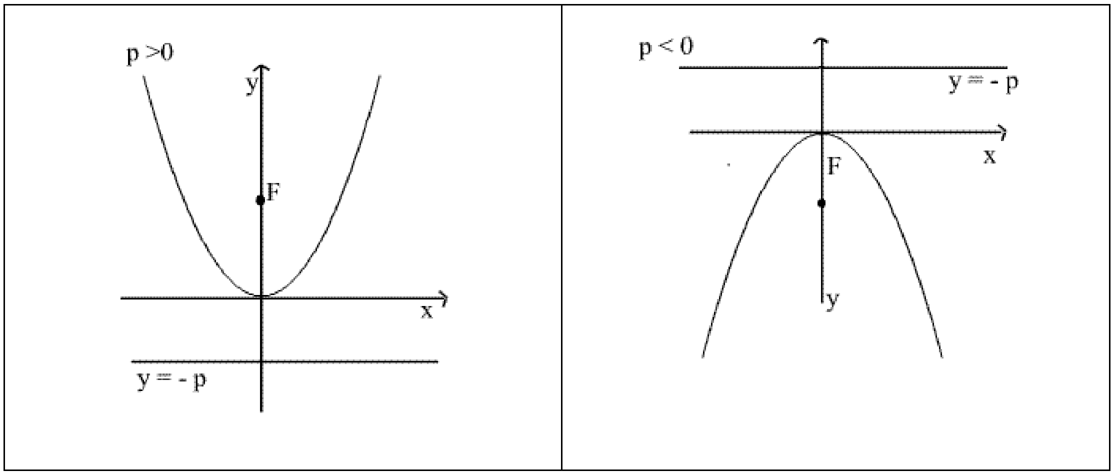
Propriedade notável da parábola

Se tivermos um refletor parabólico com uma fonte de luz localizada no seu foco, os raios que saem dessa fonte e que incidem sobre a superfície do refletor são refletidos segundo retas paralelas ao eixo de simetria (ver figura abaixo). Esse é o princípio do refletor parabólico usado nos faróis de automóveis e holofotes. Essa propriedade também é empregada na antena parabólica e no telescópio refletor, onde os raios de luz, considerados paralelos, de estrelas distantes se concentram no foco.

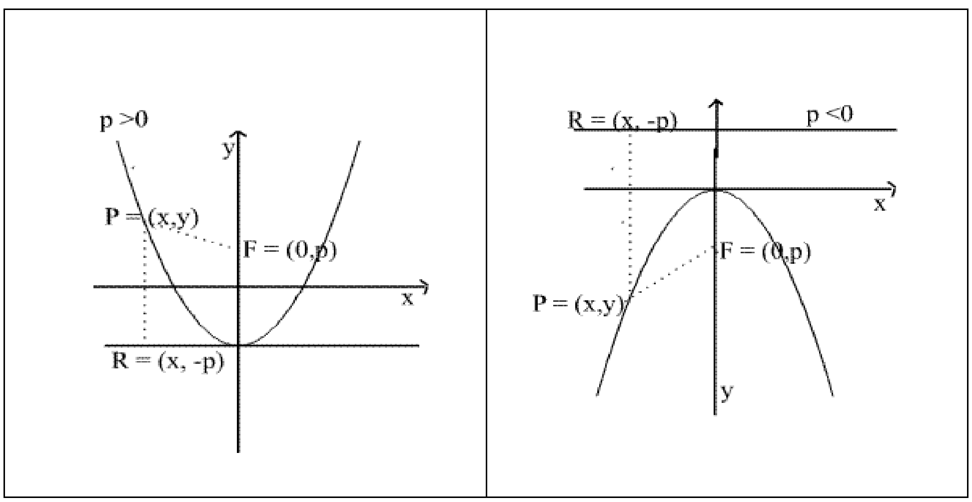


Voltando ao estudo das funções, podemos observar que em um sistema de coordenadas xOy, uma determinada parábola é o gráfico de alguma função, se, e somente se, seu eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy.

Vamos determinar a equação de uma parábola cujo eixo de simetria é o eixo Oy e possui vértice na origem. Tomemos o foco $F = (0, p)$, com $p \neq 0$. Consequentemente, a diretriz tem equação $y = -p$ (ver figura a seguir).



Sejam $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola e R um ponto sobre a diretriz r, de modo que $d(P,F) = d(P,R)$ (ver figura a seguir).



Usando a expressão analítica da distância entre dois pontos, temos

$$d(P,F) = d(P,R) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2py = 2py \Leftrightarrow x^2 = 4py.$$

Ou seja, $y = \dfrac{1}{4p} x^2$.

Fazendo $a = \dfrac{1}{4p}$, temos $y = ax^2$.

Reciprocamente, se um ponto $P=(x,y)$ é tal que $y=ax^2$, com $a\neq 0$, vemos que este ponto está sobre uma parábola de vértice na origem e eixo coincidente com Oy, pois como mostram as equivalências acima, fazendo $a=\frac{1}{4p}$,

$$y=\frac{1}{4p}x^2 \Rightarrow d(P,F)=d(P,R) \text{ onde } F=(0,p) \text{ e } R=(x,-p) \Rightarrow d(P,F)=d(P,r).$$

Concluímos portanto que $P=(x,y)$ pertence a uma parábola com vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo Oy se, e somente se,

$$\boxed{y=ax^2}$$

onde $a=\frac{1}{4p}$ e o foco $F=(0,p)$.

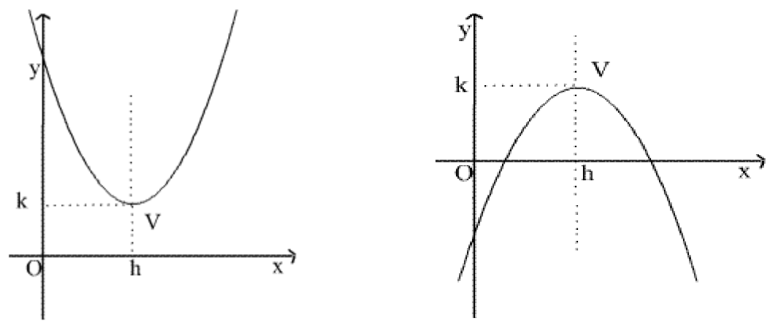
Se $a>0$ (ou seja, $p>0$), dizemos que a *concavidade da parábola está voltada para cima*. Se $a<0$ (ou seja, $p<0$), dizemos que a *concavidade da parábola está voltada para baixo.*

Exemplo

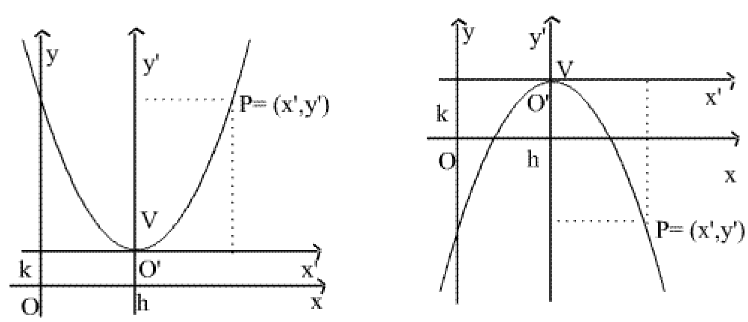
1) A parábola $y=x^2$ tem foco $F=$ (0, 1/4) e diretriz $y=$ -1/4.

2) O foco da parábola $y=-\frac{x^2}{4}$ tem coordenadas (0, -1) e sua concavidade está voltada para baixo.

Vejamos agora a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo O*y* e vértice no ponto (h, k).



Consideremos um novo sistema ortogonal de coordenadas x'O'y' com origem em O' = (h,k) e eixos O'x' e O'y' paralelos a Ox e Oy respectivamente.



Neste sistema, $P=(x',y')$ pertence à parábola se, e somente se,

$$y'=ax'^2 \qquad \text{(I)}$$

Sendo $P = (x, y)$ em xOy, temos $x = x' + h$ e $y = y' + k$, logo,

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k \qquad \text{(II)}$$

De acordo com (I) e (II),

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{(III)}$$

Daí,

$$y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

Fazendo $b = -2ah$ e $c = ah^2 + k$, temos finalmente

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \qquad \text{(IV)}$$

Observações

1) Nas figuras apresentadas, os vértices foram colocados no primeiro quadrante para melhor visualizar. Mas na dedução acima não houve particularização.

2) A definição de concavidade de parábola com eixo de simetria paralelo a Oy é a mesma: Quando $a > 0$, a concavidade é dita "para cima". Quando $a < 0$, a concavidade é dita "para baixo".

Quase sempre temos uma parábola dada pela equação $y = ax^2 + bx + c$, e queremos determinar o seu vértice. Vejamos como:

A partir da equação (IV) obtemos

$$y - c = a[x^2 + (b/a)x] = a(x + b/2a)^2 - b^2/4a$$

ou ainda,

$$y + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 \qquad \text{(V)}$$

onde chamamos

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

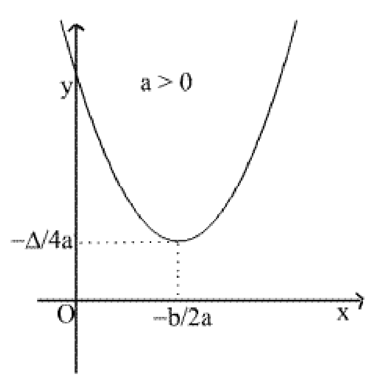
Comparando (III) e (V), podemos concluir que (IV) com $a \neq 0$, representa uma parábola com vértice (h,k), onde

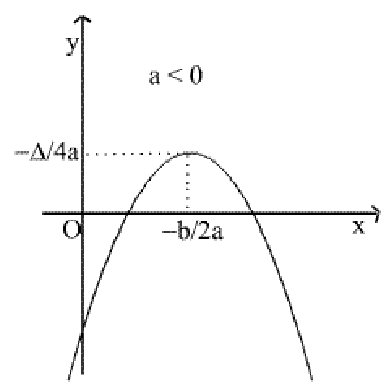
$$\boxed{h = -b/2a} \quad \text{e} \quad \boxed{k = -\Delta/4a}$$

e eixo de simetria paralelo a Oy.

Conclusão: Dada a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, então seu vértice é

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$





6.2. *FUNÇÃO QUADRÁTICA*

Sejam $a, b, c \in R$, com $a \neq 0$. A função $f: R \to R$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall\ x \in R$, é chamada *função quadrática* ou *função polinomial do segundo grau.*

Pelo exposto anteriormente, podemos afirmar que o gráfico da função quadrática é uma parábola de vértice em $(-b/2a, -\Delta/4a)$, possui eixo de simetria paralelo ao eixo Oy, com equação $x = -b/2a$, que, se $a > 0$, a concavidade do gráfico está voltada para cima e, se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

Além disso, se $a > 0$ o conjunto imagem de f é $\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$; e se $a < 0$ o conjunto imagem de f é $\left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

6.3. *VALOR MÁXIMO OU VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.*

Dada f uma função real, o número $Y_M \in \mathrm{Im}(f)$, é denominado *valor máximo* de f se, e somente se, $Y_M \geq f(x)$, para todo $x \in D(f)$. O número $Y_m \in \mathrm{Im}(f)$ é valor mínimo de f se, e somente se, $Y_m \leq f(x)$, para todo $x \in D(f)$.

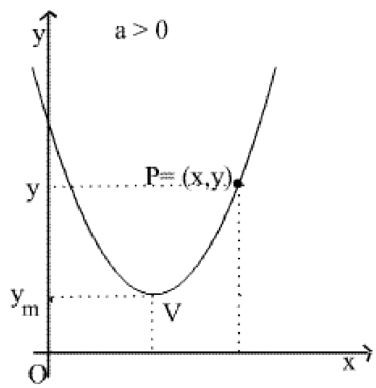
No caso da função quadrática, pela própria forma do seu gráfico, vemos que $y = -\Delta/4a$ é o seu valor mínimo, se $a > 0$, e é o seu valor máximo, se $a < 0$.

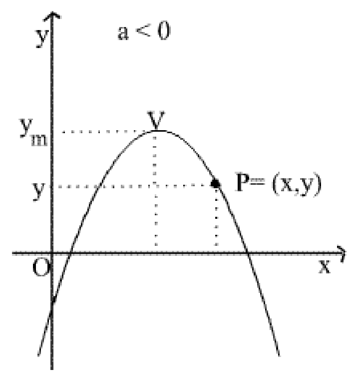
Podemos verificar este fato analiticamente:

De (V) temos,

$$f(x) + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 .$$

Como $(x+b/2a)^2 \geq 0$, $\forall\ x \in R$, segue-se que, se $a>0$, $f(x)+\Delta/4a \geq 0$, ou seja, $f(x) \geq -\Delta/4a$. Portanto o valor mínimo de f ocorre com a igualdade $f(x) = -\Delta/4a$. Analogamente, se $a<0$, $f(x)+\Delta/4a \leq 0$, ou seja, $f(x) \leq -\Delta/4a$. Portanto o valor máximo de f ocorre quando $f(x) = -\Delta/4a$.





$\text{Im}(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ $\qquad$ $\text{Im}(f) = \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$

6.4. *ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA*

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, um número real x para o qual $f(x)=0$ é uma raíz real da equação $ax^2+bx+c=0$.

De (V) temos,

$$f(x)+\frac{\Delta}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2.$$

Logo, se $f(x)=0$ então

$$\Delta = 4a^2(x+b/2a)^2.$$

Desta última igualdade obtemos:

Se $f(x)=0$ para algum $x \in R$ então $\Delta \geq 0$, isto é, se $\Delta < 0$ então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in R$. A função não possui zeros se $\Delta < 0$.

Se $\Delta = 0$, a função só se anula em $x = -b/2a$.

Se $\Delta > 0$, a função possui dois zeros:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Geometricamente, o gráfico de f não intercepta o eixo Ox, se $\Delta < 0$, intercepta em um único ponto, se $\Delta = 0$ e intercepta em dois pontos se $\Delta > 0$.

Observamos que, sendo $\Delta > 0$, obtemos

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -b/a$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = c/a$$

Com isso podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2) =$$

$$= \mathrm{a}(\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}_1\mathrm{x} - \mathrm{x}_2\mathrm{x} + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2) = \mathrm{a}\,[\mathrm{x}\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1) - \mathrm{x}_2\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)] =$$

$$= \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_2)$$

6.5. *SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA*

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0$.

Recorrendo a (V) temos,

$$f(x) = -\frac{\Delta}{4a} + a(x + \frac{b}{2a})^2 .$$

Portanto,

Se $\Delta < 0$ então $-\Delta/4a > 0$, para o caso $a > 0$, e $-\Delta/4a < 0$, se $a < 0$.

Logo,

$$\Delta < 0 \ \text{ e } \ a > 0 \ \Rightarrow \ f(x) > 0, \ \ \forall \ x \in R$$

$$\Delta < 0 \ \text{ e } \ a < 0 \ \Rightarrow \ f(x) < 0, \ \ \forall \ x \in R$$

Isto é, f tem mesmo sinal de a.

Se $\Delta = 0$, $f(x) = a(x + b/2a)^2$, portanto,

$$f(x) = 0 \iff x = -b/2a, \text{ pois } a \neq 0.$$

Logo,

$$\Delta = 0 \text{ e } a > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \text{ se } x \neq -b/2a$$

$$\Delta = 0 \text{ e } a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \text{ se } x \neq -b/2a$$

Isto é, f tem o sinal de *a,* exceto em $x = -\mathrm{b}/\mathrm{a}$

Se $\Delta > 0$, consideremos, x_1 e x_2, os zeros de f, supondo que $x_1 < x_2$. Estudemos o sinal da expressão $A = (x - x_1)(x - x_2)$:

- Se $x > x_2$ então $x > x_1$, neste caso $x - x_2 > 0$ e $x - x_1 > 0$, logo $A > 0$.
- Se $x < x_2$ e $x > x_1$ então $x - x_2 < 0$ e $x - x_1 > 0$, logo $A < 0$.
- Se $x < x_1$ então $x < x_2$, neste caso $x - x_2 < 0$ e $x - x_1 < 0$, logo $A > 0$.

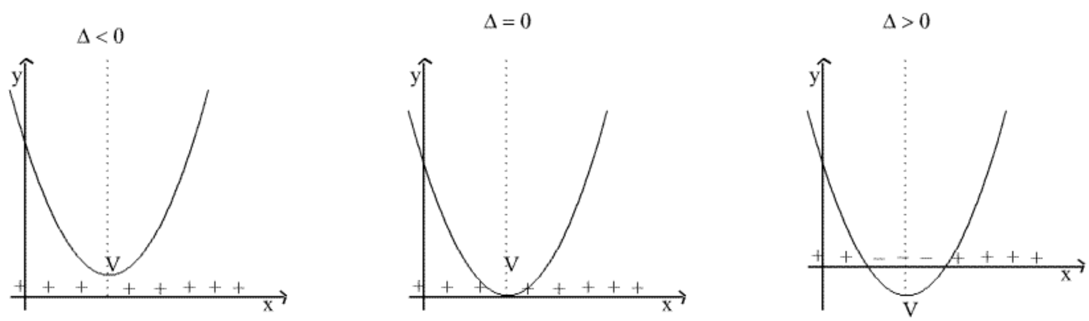
Usando que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, concluímos

$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ & \text{e} \\ f(x) < 0 & \text{se } \quad x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

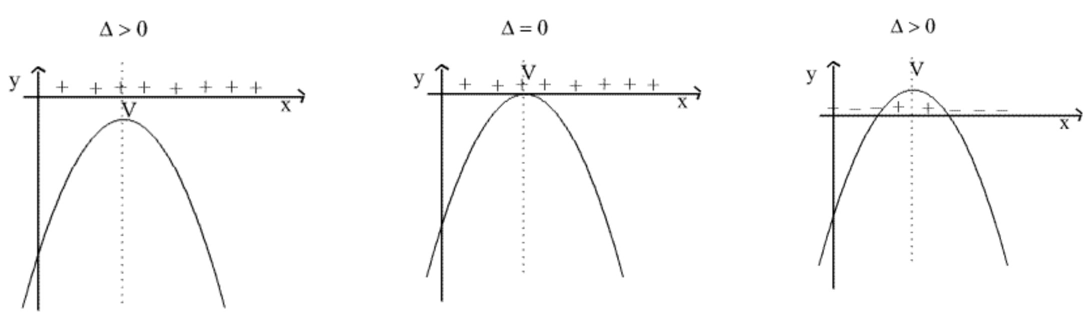
$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ & \text{e} \\ f(x) > 0 & \text{se } \quad x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Através do seu gráfico é muito fácil fazer o estudo de sinal de uma função quadrática, como ilustramos a seguir.

- $a > 0$:



- $a < 0$:



EXERCÍCIOS

1) Mostre analiticamente que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$ é crescente em $[-b/2a, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, -b/2a]$.

2) Resolva as seguintes inequações:

a) $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$ b) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ c) $-3x^2 + x - 7 \geq 0$.

3) Determine os domínios das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x - 1}}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-3x^2 + x - 7}{2x^2 + 5x - 3}}$.

4) Suponha que os freios de um automóvel são aplicados de modo a produzir no automóvel uma força constante, contrária ao movimento. Pode-se mostrar utilizando o "Princípio da Conservação da Energia" que o deslocamento *D* do automóvel, desde o início da freagem até a sua parada completa é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade *V* com que estava o veículo quando o freio foi acionado. Assim temos:

$$D = kV^2$$

onde *k* é uma constante que depende da massa e da força aplicada. Determine k para este automóvel, sabendo que para *V* = 32 km/h, o valor do deslocamento, *D,* é igual a 8 km. Construa o gráfico de *D* em função de *V,* para $V \geq 0$. Qual o valor de D quando *V* = 80 km/h?

5) Um projétil lançado da origem O = (0,0) segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica representada por $y = ax^2 + bx$. Sabendo que o projétil atinge sua altura máxima no ponto (2,4), escreva a equação dessa parábola.

6) Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de *t* segundos, atinge a altura *h* (em metros) dada por $\mathrm{h} = 40\mathrm{t} - 5\mathrm{t}^2$.

a) Calcule a posição da pedra no instante *t* = 2 seg .

b) Calcule o instante em que a pedra passa pela posição 75 m, durante a subida.

c) Determine a altura máxima que a pedra atinge.

d) Construa o gráfico de *h* em função de *t*, observando o domínio de *h* neste problema.

7) Quais as dimensões do retângulo de maior área que se pode construir com um fio de comprimento p?

8) Dentre os números positivos que somados dão 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados seja mínima.

9) Para que um remédio produza o efeito desejado, sua concentração na corrente sanguínea deve estar acima de um certo valor, o nível terapêutico mínimo. Suponhamos que a concentração de um remédio *t* horas após ser ingerido seja dada por $C = \dfrac{21t}{(t^2 + 6)}$ mg/l. Se o nível terapêutico mínimo é 3 mg/l, determine quando este nível é excedido.

10) O preço do custo do pão de farinha integral é de R$ 0,50 cada. Um padeiro calcula que, se vender cada pão por *x* reais, os consumidores comprarão $100(3 - x)$ pães por dia. Qual é o preço de venda do pão que maximiza o lucro do padeiro?