12. *FUNÇÕES INJETORAS. FUNÇÕES SOBREJETORAS*

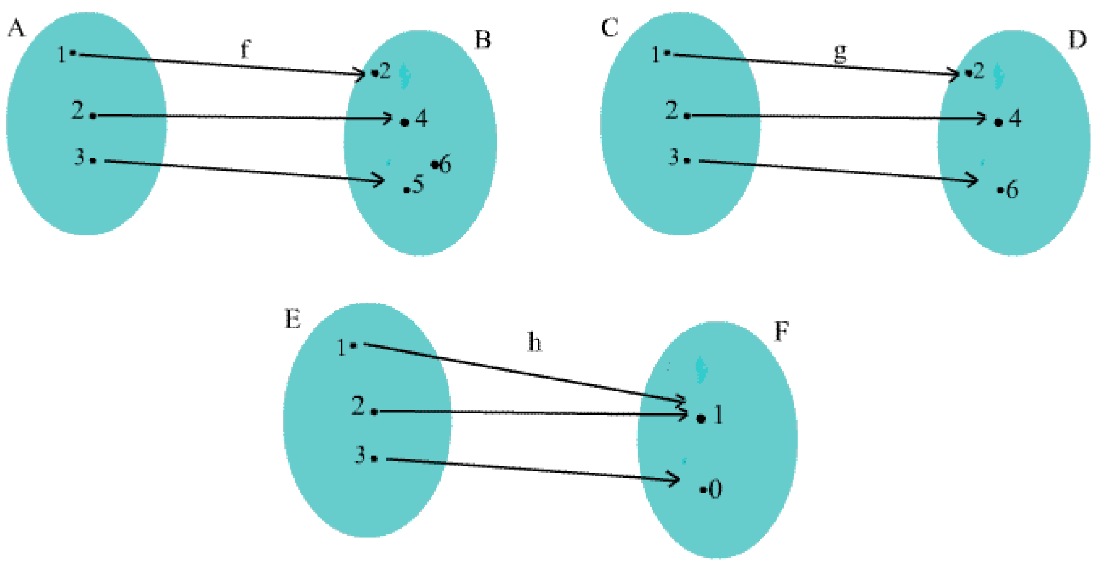
12.1 FUNÇÕES INJETORAS

Definição

Dizemos que uma função $f: A \to B$ é injetora quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando $x_1 \neq x_2$, em A, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplos

1) Sejam as funções definidas pelos diagramas:



Então, apenas f e g são funções injetoras. A função h é tal que $h(1) = h(2)$, logo não é injetora.

2) A função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, é injetora.

De fato, para todos x_1 e x_2 em R, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) = 0.$$

Como $a.(x_1 - x_2) = 0$, com $a \neq 0$, então $(x_1 - x_2) = 0$ e portanto $x_1 = x_2$.

3) A função $f : R - \{1\} \rightarrow R - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ é injetora.

De fato, dados x_1 e x_2 em $R - \{1\}$, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = 3x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

4) Exploraremos a seguir aspectos mais geométricos da injetividade.

Evidentemente, uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, para todo $b \in$ B, a equação $f(x) = b$ possui no máximo uma solução $a \in$ A. Logo, se A e B são subconjuntos de R, $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, para toda reta $y = b$, $b \in$ B, a interseção do gráfico de f com essa reta ocorre em no máximo um ponto. Em vista disto temos:

- Se f e g são funções cujos gráficos são representados por,

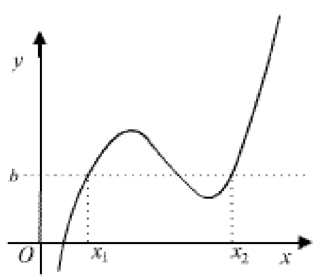


Gráfico de f

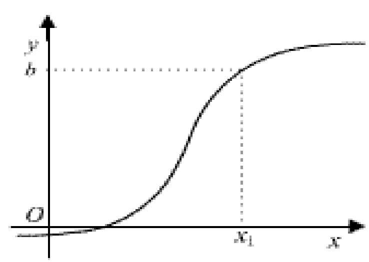
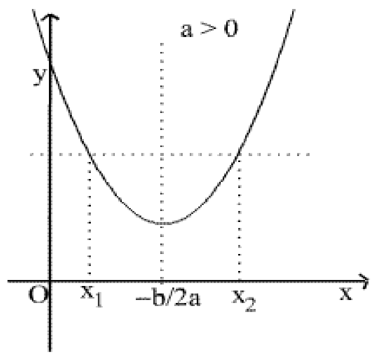
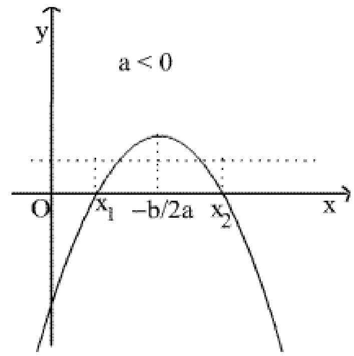


Gráfico de g

então f não é injetora e g é injetora.

- A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, (exemplos de gráficos a seguir) não é injetora.





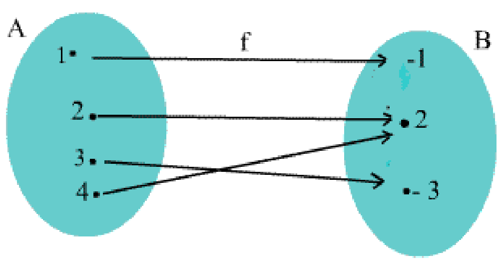
Isto se deve ao fato do seu gráfico ser simétrico em relação à reta x = -b/(2a).

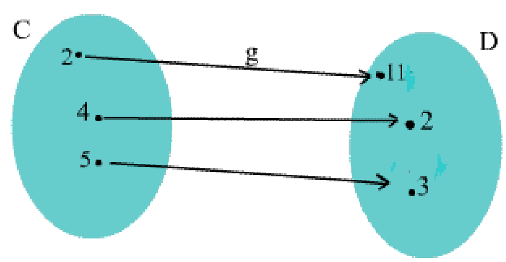
12.2 FUNÇÕES SOBREJETORAS

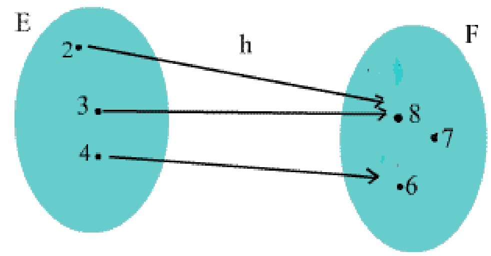
Dizemos que uma função f: A $\rightarrow$ B sobrejetora quando para todo $y \in$ B, existe pelo menos um $x \in$ A tal que $f(x)$ = y.

Exemplos

1) Considere as funções f, g e h definidas pelos diagramas:







As funções f e g são sobrejetoras porque, em ambos os casos, o conjunto imagem é igual ao contradomínio. O mesmo não ocorre com a função h e portanto ela não é sobrejetora.

2) A função afim $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é sobrejetora.

Dado $y \in R$, exibiremos $x \in R$ tal que $f(x) = y$. Se $y \in R$ então $x = \dfrac{y-b}{a}$ é um número real tal que

$$f(x) = a.\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y.$$

3) Exploraremos a seguir aspectos mais geométricos da sobrejetividade.

Evidentemente, uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo $b \in$ B, a equação $f(x) = b$ possui pelo menos uma solução $a \in$ A. Logo, se A e B são subconjuntos de R, $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, a interseção entre o gráfico de f e a reta $y = b$, para todo $b \in B$ é diferente do vazio.

Usando este critério temos:

Se $f:[0,c] \to [a,b]$ e $g:[0,c] \to [a,b]$ são funções cujos gráficos são representados a seguir então f é sobrejetora e g não é sobrejetora.

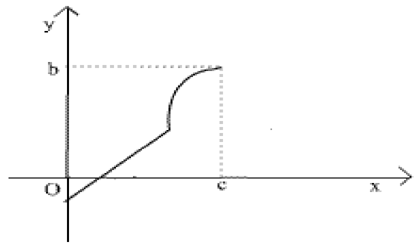


Gráfico de f

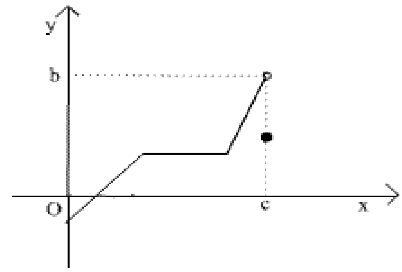
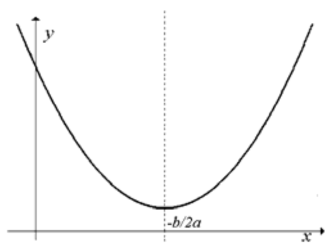


Gráfico de g

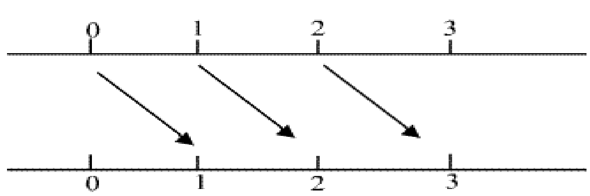
A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, não é sobrejetora, mas a função $g: R \rightarrow \left[\frac{-\Delta}{4.a} \quad , +\infty \right]$, tal que $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a>0$, é sobrejetora.



4) A função $f: N \rightarrow N$ definida por $f(x) = x + 1$ (veja figura abaixo) não é sobrejetora. De fato,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Como $-1 \notin N$, então não existe $x \in N$ tal que $f(x) = 0$.



5) A função $f: R - \{1\} \rightarrow R$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ não é sobrejetora.

De fato, se y está no conjunto imagem de f, Im(f), então existe $x \in R - \{1\}$ tal que $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ e, consequentemente,

$$(y - 2).\, x = 1 + y. \qquad \text{(I)}$$

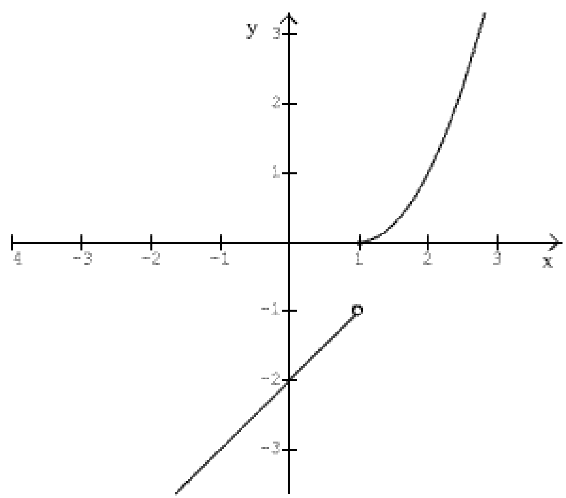
Fazendo $y = 2$ em (I) temos: 0 = 3, uma contradição. Logo, $2 \notin$ Im(f).

Observe que a função $\mathrm{f} : \mathrm{R} - \{1\} \rightarrow \mathrm{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ é sobrejetora.

6) Seja f: $\mathrm{R} \rightarrow \left]-\infty, -1\right[\cup \left[0, +\infty\right[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & se\ \ x \geq 1 \\ x-2 & se\ \ x < 1 \end{cases} ,$$

cujo gráfico é dado a seguir



Mostraremos, através da definição, que f é sobrejetora.

Dado $y \in$ CD(f), vamos distinguir dois casos:

1º caso. $y \in [0, +\infty)$.

Tomando $x = \sqrt{y} + 1$ temos que x ≥ 1 e então,

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-1)^2 = \left(\sqrt{\mathrm{y}} + 1 - 1\right)^2 = y.$$

2º caso. $y \in (-\infty, -1)$. Tomando $x = y + 2$ temos que $x < 1$ e então,

$$f(x) = x - 2 = (y - 2) + 2 = y.$$

Portanto f é sobrejetora.

Proposição

Se f: A $\to$ B e g: B $\to$ C são funções sobrejetoras, então $g \, \boldsymbol{o} \, f$ é sobrejetora.

D] Seja $z \in$ C, um elemento qualquer. Como g é sobrejetora, existe $y \in$ B tal que $g(y) = z$. Sendo f também sobrejetora e $y \in$ B, existe $x \in$ A tal que $f(x) = y$. Logo, $(g \, \boldsymbol{o} \, f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

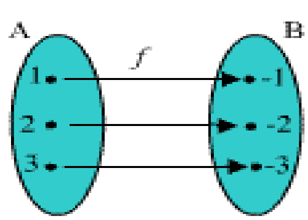
12. 3 FUNÇÕES BIJETORAS

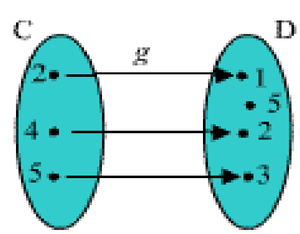
Definição

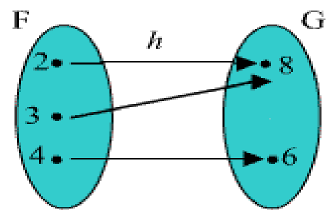
Uma função f: A $\to$ B chama-se bijetora (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Exemplos

1) Sejam as funções f, g e h definidas pelos diagramas:







A função f é bijetora porque é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. A função g não é bijetora porque não é sobrejetora. A função h não é bijetora porque não é injetora.

2) A função identidade id: A $\rightarrow$ A definida por $id(x) = x$, para todo $x \in$ A, é a mais simples das funções bijetoras.

3) A função afim $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é bijetora porque, como já foi visto, é injetora e sobrejetora.

4) A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, não é bijetora porque não é injetora (ou porque não é sobrejetora).

5) Evidentemente, uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, para todo $b \in$ B, a equação $f(x) = b$ possui uma única solução $a \in$ A. Logo, se A e B são subconjuntos de R, $f: A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, para toda reta $y = b$, $b \in$B, a interseção do gráfico de f com essa reta ocorre em um único ponto.

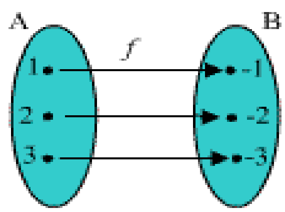
Proposição

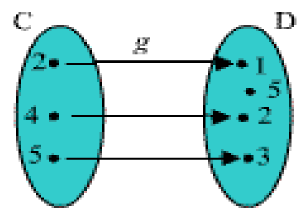
Se f: A $\rightarrow$ B e g: B $\rightarrow$ C são funções bijetoras, então $g \circ f$: A $\rightarrow$ C é bijetora.

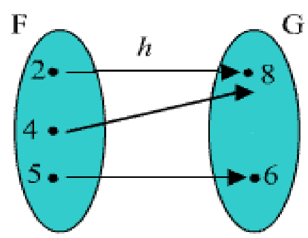
D] Já vimos que composta de funções injetoras é injetora e que a composta de funções sobrejetoras é sobrejetora; logo se f: A $\rightarrow$ B e g: B $\rightarrow$ C são funções bijetoras, então $g \circ f$: A $\rightarrow$ C é bijetora.

12.4 FUNÇÃO INVERSA

Consideremos as funções, *f, g e h,* definidas pelos diagramas







É possível obtermos funções de B em A, ou de D em C, ou ainda de F em E, invertendo os sentidos das flechas?

Podemos observar que só é possível no caso da função *f.* Para as funções *g* e *h, a* definição de função não é satisfeita.

Definição

Dizemos que a função $g\colon B \to A$ é a *inversa* da função $f\colon A \to B$, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Decorre da definição:

1) gof = Id_A e fog = Id_B.

2) y = f(x), se somente se, x = g(y), para todo $x \in$ A e para todo $y \in$ B.

3) g é a inversa de f, se e somente se, f é a inversa de g.

Da igualdade $g(f(x)) = x$, para todo $x \in$ A, segue que f é injetora, pois para todo x_1 e x_2 $\in$ A , $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$. E se $f(g(y)) = y$ para todo $y \in$ B, temos que f é sobrejetora pois, dado $y \in$ B, arbitrário, podemos tomar $x = g(y) \in$ A e temos $f(x) = f(g(y))$ $= y$.

Logo , se f: A $\to$ B possui um inversa então f é bijetora.

Por outro lado, se f: A $\to$ B é bijetora então possui uma inversa g: B $\to$ A. De fato, como f é bijetora para cada $y \in$ B, existe um único $x \in$ A , tal que y = f(x), definamos g: B $\to$ A como sendo g(y) = x. É claro que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in$ A e $y \in$ B..

Concluímos assim, que

Uma função f: A $\to$ B bijetora, se e somente se, possui um inversa g: B $\to$ A.

Quando g: B $\to$ A é a inversa de f: A $\to$ B, escrevemos $g = f^{-1}$.

Exemplos:

1) A função $f : R - \{1\} \to R - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ é bijetora (já foi provado anteriormente), a sua inversa é a função $g : R - \{2\} \to R - \{1\}$, definida por $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

De fato, $g(f(x)) = \dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}+1}{\dfrac{2x+1}{x-1}-2} = x$, para todo x $\in$ R $-$ {1} e $f(g(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{x+1}{x-2}-1} = x$, para todo x $\in$ R $-$ {2}.

2) Dadas as funções $f: R \to [0,+\infty)$ e $g: [0,+\infty) \to R$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$, temos que $f(g(y)) = y$ para todo $y \geq 0$. No entanto, $g(f(x))$ só é igual a x quando $x \geq 0$. Se x for

negativo, $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = -x$. Logo g não é a inversa de f. *Na verdade,* f não possui inversa, pois não é injetora.

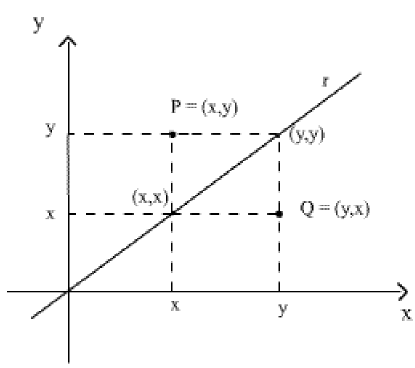
Se considerarmos a função F: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, restrição de f a $[0, +\infty)$, temos que f é bijetora, e sua inversa é a função G: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $G(y) = \sqrt{y}$, porque

$$G(F(x)) = \sqrt{x^2} = x \quad \text{e} \quad F(G(y)) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Gráfico da função inversa

Existe uma relação interessante entre o gráfico de uma função f e o de sua inversa f^{-1}. Notemos da equivalência, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ que o ponto P = (x,y) está no gráfico de f se, e somente se, o ponto Q = (y,x) está no gráfico de f^{-1}.

Vejamos uma ilustração desta situação:



Como podemos observar os pontos P e Q são simétricos em relação à reta r (1ª bissetriz) e portanto o gráfico da função f é simétrico ao gráfico de sua inversa f^{-1} em relação à 1ª bissetriz.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dadas as funções $g(x) = (x+1)^2$ e $f(x) = \sqrt{x}$, determine fog.

2) Um exportador de café calcula que os consumidores comprarão , aproximadamente,
$(p) = 4{,}374 / p^2$ quilogramas de café por semana, quando o preço é de p Reais por quilograma. Estima-se que, daqui a t semanas, o preço do café será de $p(t) = 0{,}04t^2 + 0{,}2t + 5$ Reais por quilograma. Expresse o consumo semanal de café como função de t.

3) Nos exemplos a seguir, determine gof :

a) $f(x) = 1 - 1/x$ e $g(x) = 1/(1-x)$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ -x-1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ e $f(x) = 1/x$

4) Use a definição para verificar que as funções a seguir são injetoras:

a) $f: R - \{-1\} \to R - \{3\}$ definida por $f(x) = (3x+2)/(x+1)$

b) $f: R^2 \to R^2$ definida por $f(x,y) = (2x, 3y)$

5) No exercício anterior use a definição para verificar que as funções dadas são sobrejetoras.

6) Determine as funções inversas das funções dadas no exercício 4).

7) Esboce o gráfico e classifique cada uma das funções seguintes em :

i) Injetora ii) Sobrejetora iii) Bijetora iv) Não injetora e não sobrejetora.

a) $f: R \to R$ definida por $f(x) = x.|x-1|$.

b) $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

8) Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, reais e de variáveis reais, mostre que:

a) $f(x)$ e $g(x)$ crescentes $\Rightarrow (gof)(x)$ é crescente.

b) $f(x)$ e $g(x)$ decrescentes $\Rightarrow (gof)(x)$ é crescente.

c) $f(x)$ decrescente (*crescente*) e $g(x)$ crescente (*decrescente*) $\Rightarrow (gof)(x)$ é decrescente.

(*Observe que valem resultados análogos quando se substitui crescente e decrescente, respectivamente, por estritamente crescente e estritamente decrescente)*

9) Um balão de ar quente é liberado à 1 hora da tarde e sobe verticalmente à razão de 2m/s. Um ponto de observação está situado a 100m do ponto do chão diretamente abaixo do balão (veja figura). Sendo t o tempo em segundos, após 1 da tarde, exprima a distância d do balão ao ponto de observação em função de t.

10) As posições relativas de uma pista de aeroporto e de uma torre de controle de 6,1m de altura são ilustradas na próxima figura. A cabeceira da pista está a uma distância perpendicular de 100 metros da base da torre. Se x é a distância percorrida na pista por um avião, expresse a distância d entre o avião e a torre de controle como função de x.