7. FUNÇÃO MODULAR

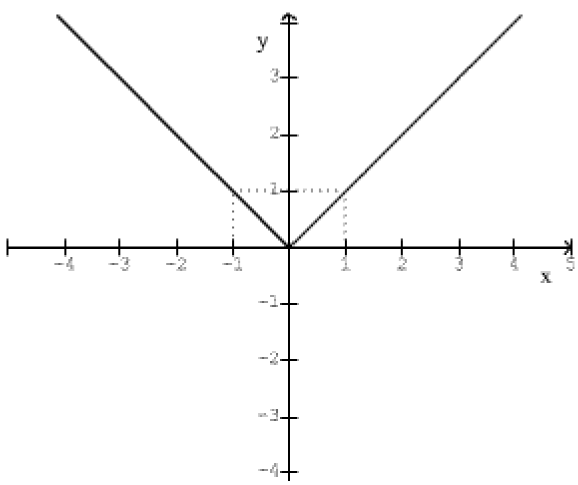
A função modular, ou função módulo, é a função definida como segue:

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Da definição de módulo de x, temos que a função modular pode ser definida por duas sentenças

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D(f) = R$ e a sua imagem é $\text{Im}(f) = R_+$. O seu gráfico é dado por



Vamos considerar agora funções definidas por sentenças do tipo

1. $g(x) = |\, f(x) \,|$
2. $g(x) = f(\, |x| \,)$

Exemplos

Vamos construir os gráficos das seguintes funções.

1) g: $R \rightarrow R$

$$x \mapsto |x^2 - 4x + 3|$$

Consideremos $g(x) = |f(x)|$, onde $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

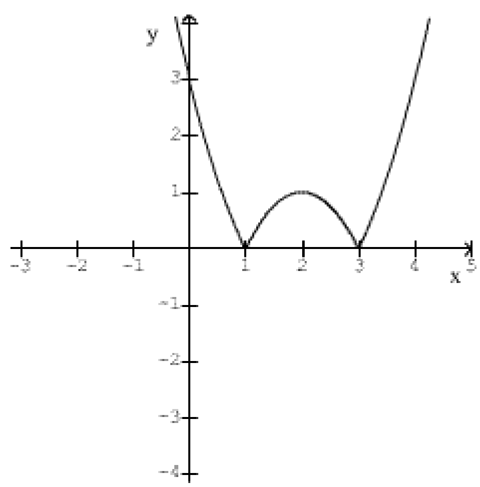
A função $g(x)$ pode ser reescrita como

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3), & \text{se } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

Analisando o sinal de $f(x)$ temos que

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{se } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

cujo o gráfico é dado a seguir



2) g: $R \rightarrow R$

$$x \mapsto |x|^2 - 4|x| + 3$$

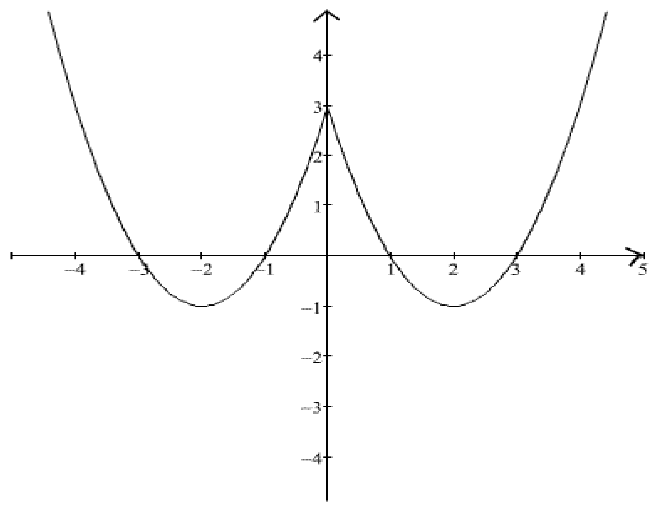
Consideremos $g(x) = f(|x|)$, onde $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A função $g(x)$ pode ser reescrita como:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ (-x)^2 - 4(-x) + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

cujo gráfico é dado a seguir



Observações

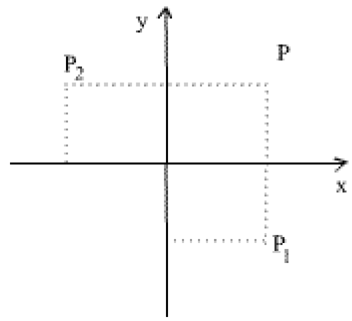
1) No exemplo 1) o gráfico da função g pode ser obtido do gráfico de f bastando para isto efetuar uma reflexão em torno do eixo Ox, no intervalo em que $f(x) < 0$.

2) No exemplo 2) o gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico de f, bastando para isto que o gráfico de f, para $x \geq 0$, sofra uma reflexão em torno do eixo Oy.

As observações feitas para os exemplos 1) e 2) podem ser generalizadas.

Dado um ponto $P = (x, y)$ no plano cartesiano temos que:

- o simétrico de P em relação ao eixo Ox é o ponto $P_1 = (x, -y)$
- o simétrico de P em relação ao eixo Oy é o ponto $P_2 = (-x, y)$.



Temos assim que:

Dada a função $y = f(x)$, o gráfico de $y = f(-x)$ é o simétrico do gráfico de $y = f(x)$ em relação a O*y*.

Dada a função $y = f(x)$, o gráfico de $y = -f(x)$ é o simétrico do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo O*x*.

Considerando a função $g(x) = f(|x|)$, temos que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Podemos então construir o gráfico de g, construindo o gráfico de f para $x \geq 0$ e, para $x < 0$, tomando o seu simétrico em relação a O*y*.

Observemos que não faz sentido definir a função $g(x) = f(|x|)$, se a função f estiver definida apenas para $x < 0$.

Consideremos agora a função $g(x) = |f(\mathrm{x})|$. Temos que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

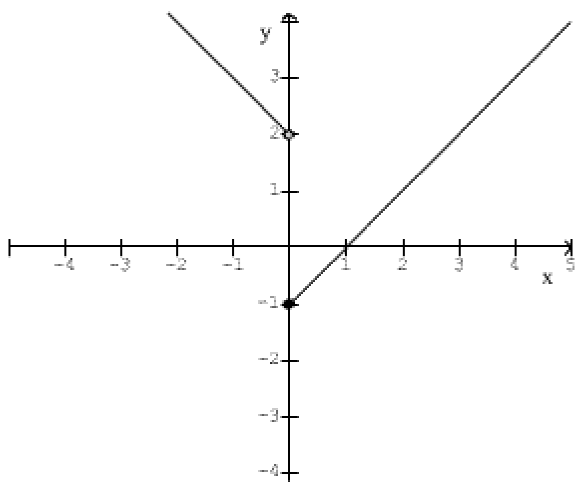
Podemos então construir o gráfico de g, construindo o gráfico de f para $f(x) \geq 0$ e, nas regiões em que $f(x) < 0$, tomando o seu simétrico em relação a O*x*.

Vejamos a construção dos gráficos de algumas funções utilizando as considerações anteriores.

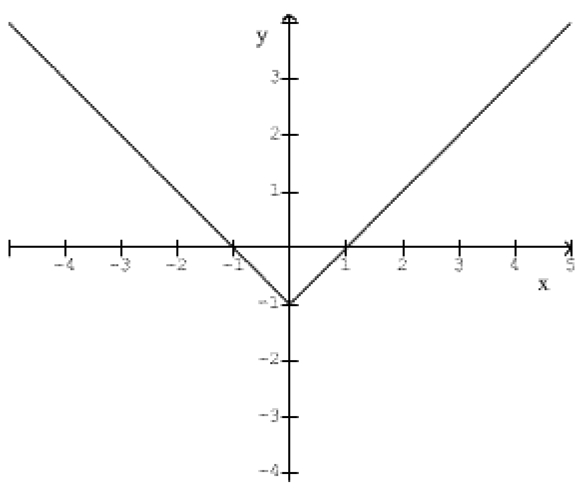
Exemplos

1) a) $f(|x|)$; b) $|f(x)|$; c) $|f(|x|)|$ para $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{se } x\geq 0 \\ -x+2 & \text{se } x<0 \end{cases}$.

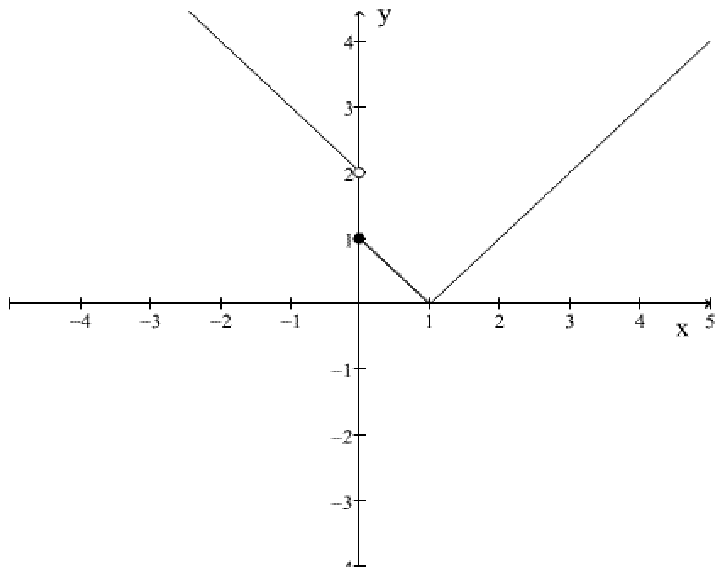
O gráfico de $f(x)$:



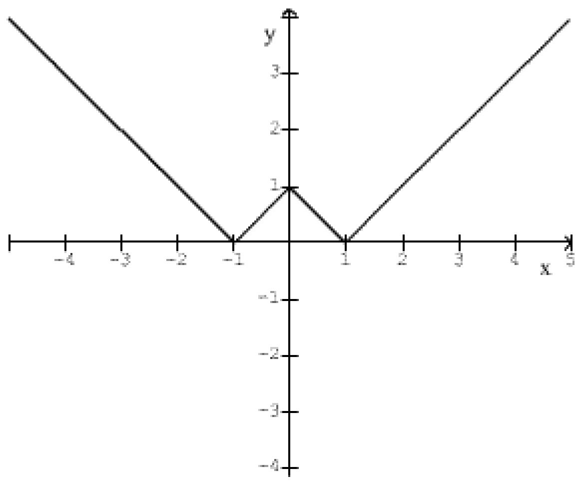
a) $f(|x|)$



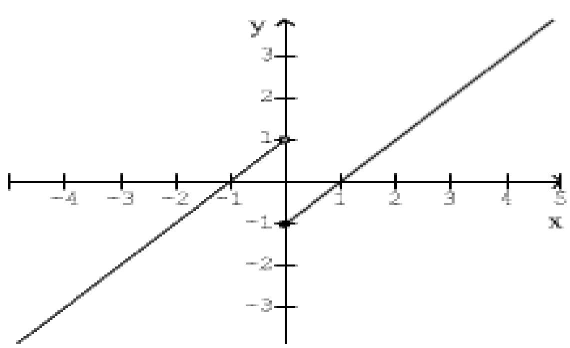
b) $|f(x)|$



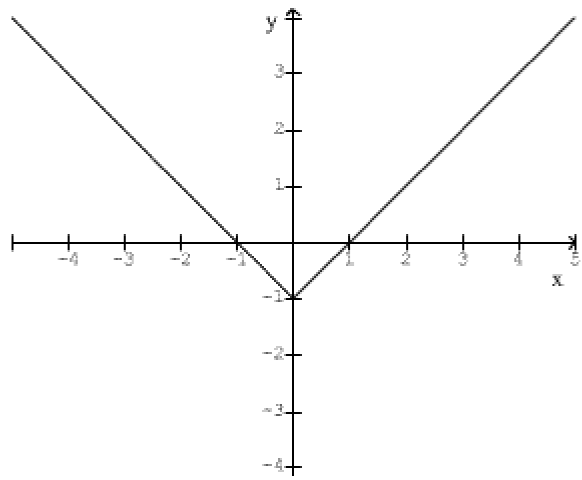
c) $|f(|x|)|$



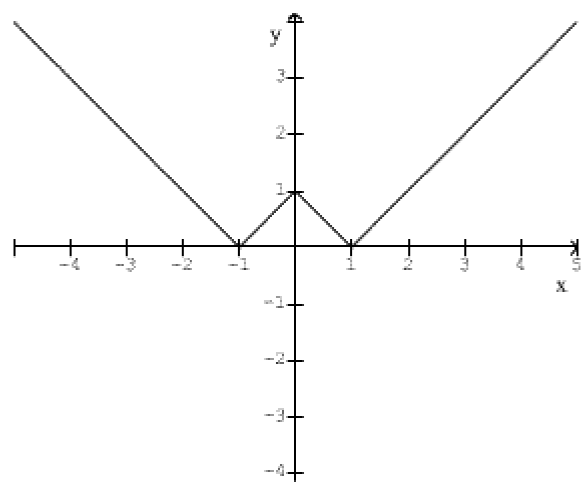
2) As mesmas construções para $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{se } x\geq 0 \\ x+1 & \text{se } x<0 \end{cases}$ cujo o gráfico é dado a seguir



a) $f(|x|)$



b) $|f(x)|$



c) $|f(|x|)|$

Neste caso, o gráfico é o mesmo do item b), uma vez que o gráfico de $|f(x)|$ é simétrico em relação ao eixo O*y*.