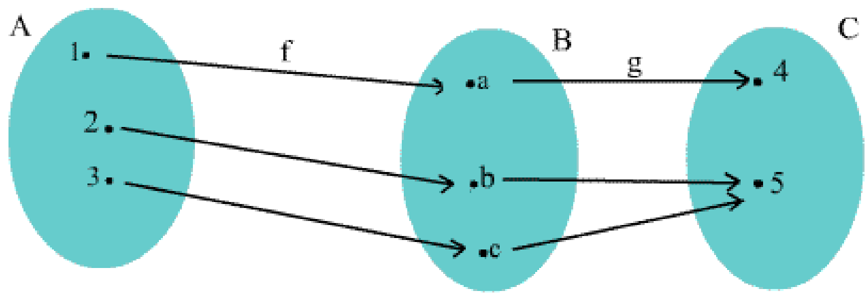
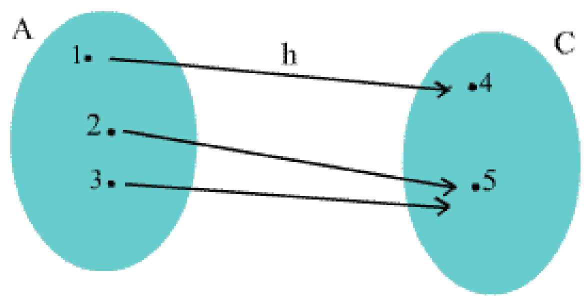
11. *COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES*

Consideremos as funções $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $h: A \to C$ dadas pelos diagramas





Observamos que

$$a = f(1) \quad \text{e} \quad g(a) = g(f(1)) = 4 = h(1)$$
$$b = f(2) \quad \text{e} \quad g(b) = g(f(2)) = 5 = h(2)$$
$$b = f(3) \quad \text{e} \quad g(b) = g(f(3)) = 5 = h(3)$$

e, portanto, para todo elemento x de A temos $g(f(x)) = h(x)$. Neste caso, h é chamada função composta de f com g e indicada por $h = g \circ f$.

Definição 1

Sejam $f: A \to B$, $g: B \to C$ funções tais que o contradomínio de f é igual ao domínio de g. Então a função composta de f com g é a função $g \circ f: A \to C$, definida por

$$(g \circ f)\,(\mathrm{x}) = g(f(x)).$$

Exemplos

1) Consideremos as funções

$$\begin{array}{lcl} f: R \to R & \quad\text{e}\quad & g: R \to R \\ \quad x \mapsto x + 1 & & \quad x \mapsto x^2 + x + 1 \end{array}$$

Temos que, para todo $x \in R$,

$$g\,(f\,(x)) = g(\,x{+}1\,) = (x{+}1)^2 + (x{+}1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$$

Então $g \circ f: R \to R$ é definida por $g(f(x)) = x^2 + 3x + 3$.

Temos, também,

$$f(g(x)) = f(\,x^2{+}x{+}1\,) = (x^2{+}x{+}1) + 1 = x^2 + x + 2, \text{ para todo } x \in R.$$

E, então, $f \circ g: R \to R$ é definida por $f(g(x)) = x^2 + x + 2$.

Observemos que neste exemplo temos

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Podemos então concluir que a composição de funções não é, em geral, comutativa.

2) Um corpo é lançado verticalmente para cima da superfície da terra, com velocidade inicial $v_o = 20$ m/s. Desprezando-se a resistência do ar e considerando-se que próximo à superfície da terra a aceleração da gravidade é de $\mathrm{g} = 10$ m/s^2, então, em cada instante t dado em segundos, sua altura em relação à superfície da terra é dada em metros pela função:

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_o t = -5t^2 + 20t$$

Vamos determinar a altura do corpo quando o tempo é dado em minutos. Temos a função $t(t_1) = 60.t_1$, que converte minutos em segundos. Então,

$$h_1(\mathrm{t}_1) = h(t(t_1)) = h(60.t_1) = -5.(60.t_1)^2 + 20.(60.t_1)$$

$$\therefore \quad h_1(t_1) = -18000.(t_1)^2 + 1200.t_1$$

O conceito de composta de duas funções pode ser generalizado.

Definição 2

Sejam $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$ funções tais que o conjunto $E = \{\, x \in A;\ f(x) \in C \,\}$ não é o vazio. Então a função composta de f com g é a função $g \circ f\colon E \to D$, definida por

$$(g \circ f)\ (\mathrm{x}) = g(f(x)).$$

Exemplo

Consideremos as funções

$$\begin{array}{rcl} f: R & \to & [-4,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-4 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} g: R_+ & \to & R \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Então

$$\mathrm{D}(g \circ f) = \{\, x\in R;\ f(x) \in R_+ \} = \{\, x\in R;\ x^2 - 4 \geq 0 \,\} =]-\infty\ , -2] \cup [2, +\infty\ [$$

$$\text{e} \qquad g(f(x)) = g(x^2-4) = \sqrt{x^2-4}\ .$$

Portanto $g \circ f\colon\ ]-\infty,-2]\cup[2,\ +\infty\ [\to R$ é tal que $g(f(\ x)) = \sqrt{x^2-4}$.