

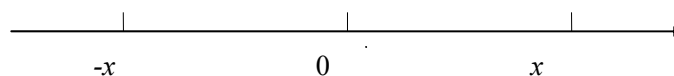
2. MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o módulo (ou valor absoluto) de x , e indicamos por $|x|$, como segue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

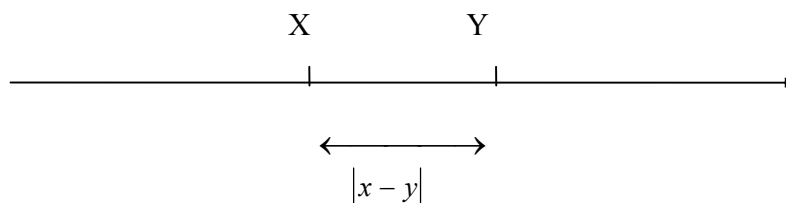
Interpretação Geométrica

O valor absoluto de um número x é, na reta, a distância entre o ponto x e a origem.



Isto é, $|x|$ corresponde a distância do ponto x ao ponto 0 .

Se os números reais x e y estão associados aos pontos X e Y na reta real, ou seja, são as coordenadas de X e Y , então $|x - y|$ corresponde à distância do ponto X ao ponto Y .



Esta interpretação como distância será de grande utilidade para que se possa enxergar intuitivamente o significado de algumas questões envolvendo módulo.

Observações

1) Temos da definição que $|x| \geq 0, \forall x \in R$.

$$2) |x| = |-x|$$

3) Decorre também da definição que $|x|$ é o maior dos números x e $-x$, o que é indicado como $|x| = \max \{-x, x\}$. Portanto, $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, o que equivale a $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in R$.

4) É importante lembrar que o símbolo $\sqrt{a}, a \geq 0$, é definido como sendo o único número x não negativo tal que $x^2 = a$. Da definição de raiz quadrada, temos $\sqrt{x^2} = |x|$.

De fato,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} = y, y \geq 0 &\Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} y = x, \text{ neste caso, } x \geq 0 \\ y = -x, \text{ neste caso, } -x \geq 0, \text{ ou seja, } x \leq 0 \end{cases} &\Rightarrow \sqrt{x^2} = y = |x| \end{aligned}$$

Notemos a diferença deste fato com o cálculo das raízes da equação $x^2 = a$ que são $x = \sqrt{a}$ e $x = -\sqrt{a}$.

Por exemplo, $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = |3|$ e $\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = |-3|$. Por outro lado,

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Exemplo

Vamos resolver as seguintes equações:

$$1) |2x + 1| = 5$$

Temos que

$$2x + 1 = 5 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = -5$$

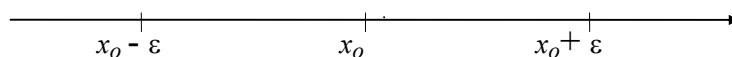
e, portanto, $x = 2$ ou $x = -3$ e o conjunto solução da equação é $S = \{-3, 2\}$.

$$2) |9x + 2| = -3$$

Não existe x pertencente a $\mathbb{R}$ tal que $|9x + 2| < 0$, logo o conjunto-solução da equação é o vazio, $S = \emptyset$.

$$3) |x - x_0| = \varepsilon, \text{ com } \varepsilon > 0$$

Temos que $x - x_0 = \varepsilon$ ou $x - x_0 = -\varepsilon$, o que equivale a $x = x_0 + \varepsilon$ ou $x = x_0 - \varepsilon$. Usando a interpretação geométrica, $|x - x_0| = \varepsilon$ significa que o número x (ou o ponto a ele associado no eixo real) está a uma distância ε de x_0 .

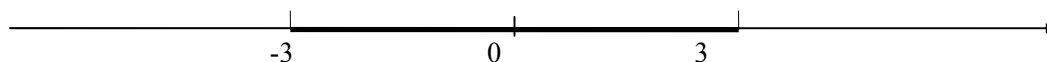


Consideremos agora algumas inequações e suas resoluções.

Exemplos

$$1) |x| < 3$$

Da interpretação geométrica de $|x|$ temos que a distância de x à origem deve ser menor que 3.

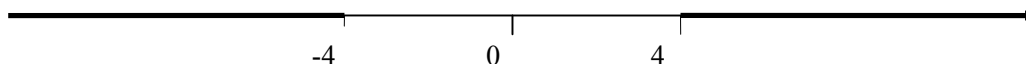


Assim, $-3 < x < 3$.

Chegamos à mesma conclusão usando o fato que $|x| = \max \{-x, x\} < 3$. Logo, $-x < 3$ e $x < 3$, o que equivale a $-3 < x < 3$.

$$2) |x| > 4$$

Ainda usando a interpretação geométrica temos que a distância de x à origem deve ser maior que 4.



Assim, $x < -4$ ou $x > 4$.

Usando o fato que $|x| = \max \{-x, x\} > 4$, temos $-x > 4$ ou $x > 4$, ou seja, $x < -4$ ou $x > 4$.

A interpretação que demos para os exemplos anteriores é geral, conforme mostram as proposições seguintes.

Proposição 2.1. Dados $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$;

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

D]

1) Mostraremos que $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$.

Usando que $|x| = \max \{-x, x\}$, temos que

$$-x \leq |x| < a \Rightarrow x > -a \quad (\text{I})$$

$$x \leq |x| < a \Rightarrow x < a \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) concluímos $-a < x < a$

2) Mostraremos que $-a < x < a \Rightarrow |x| < a$.

i) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$. Por hipótese $x < a$, logo $|x| < a$.

ii) Se $x < 0$ então $|x| = -x$. Por hipótese $-a < x$, ou seja, $-x < a$. Assim, $|x| < a$.

Observação

Na hipótese da Proposição 2.1. temos $a > 0$. Se $a \leq 0$ temos uma inequação sem solução $|x| < a \leq 0$.

Proposição 2.2. Dados $a \in R$, $a > 0$ e $x \in R$;

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a$$

D]

1) Mostraremos que $|x| > a \Rightarrow x < -a \text{ ou } x > a$.

i) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$ e como $|x| > a$, temos $x > a$.

ii) Se $x < 0$ então, $-x = |x| > a$, isto é, $-x > a$, ou seja, $x < -a$.

2) Mostraremos que $x < -a \text{ ou } x > a \Rightarrow |x| > a$.

Usando que $|x| = \max \{-x, x\}$, temos que

$$a < x \leq |x| \Rightarrow |x| > a \text{ ou}$$

$$a < -x \leq |x| \Rightarrow |x| > a$$

Observação

Na hipótese da Proposição 2.2. temos $a > 0$. Se $a < 0$, todo $x \in R$ é solução da inequação $|x| > a$ e se $a = 0$, todo $x \in R^*$ é solução da inequação $|x| > 0$

Exemplos

Vamos resolver as seguintes inequações:

1) $|2x - 5| < 3$

$$|2x - 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 5 < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 8 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

2) $|6 - 2x| \geq 7$

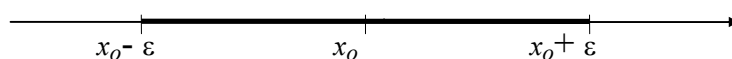
$$|6 - 2x| \geq 7 \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 7 \text{ ou } 6 - 2x \leq -7 \Leftrightarrow -2x \geq 1 \text{ ou } -2x \leq -13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq \frac{13}{2}.$$

3) $|x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0$

$$|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

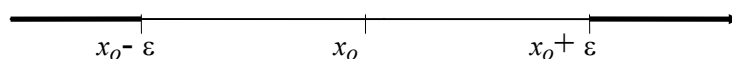
A interpretação geométrica nos diz que a distância de x a x_0 é menor que ε , logo x deve estar entre $x_0 - \varepsilon$ e $x_0 + \varepsilon$, ou seja, $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.



4) $|x - x_0| > \varepsilon, \varepsilon > 0$

$$|x - x_0| > \varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < -\varepsilon \text{ ou } x - x_0 > \varepsilon \Leftrightarrow x < x_0 - \varepsilon \text{ ou } x > x_0 + \varepsilon$$

A interpretação geométrica nos diz que a distância de x a x_0 é maior que ε , logo x deve estar antes de $x_0 - \varepsilon$ ou depois de $x_0 + \varepsilon$, ou seja, $x \in]-\infty, x_0 - \varepsilon[\cup]x_0 + \varepsilon, +\infty[$



Proposição 2.3. Dados $x, y \in R$, temos que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

D]

Temos três casos a considerar.

i) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, temos $x \cdot y \geq 0$, portanto, $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

ii) Se $x < 0$ e $y < 0$, temos $x \cdot y > 0$, e portanto, $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

iii) Se $x \geq 0$ e $y < 0$, temos $x \cdot y \leq 0$, e portanto, $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Observação

Se já são conhecidas as propriedades das raízes podemos demonstrar, mais diretamente, como a seguir:

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

Proposição 2.4. Dados $x, y \in R$, $y \neq 0$, temos que $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

D]

Usando o fato que $\frac{1}{|y|} = \left| \frac{1}{y} \right|$, (que pode ser facilmente demonstrado separando-se em dois casos: $y > 0$ e $y < 0$) e a Proposição 2.3. temos:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{y} \right| = |x| \left| \frac{1}{y} \right| = |x| \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

Proposição 2.5. (Desigualdade Triangular). Dados $x, y \in R$, temos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

D]

Temos três casos a considerar.

i) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos $x + y \geq 0$ e, portanto,

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

ii) Se $x < 0$ e $y < 0$ então $x + y < 0$, portanto,

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| + |y|$$

iii) Se $x \geq 0$ e $y < 0$, temos

$$y < -y = |y|, \quad -x \leq x = |x| \quad \text{e} \quad x + y \geq 0 \quad \text{ou} \quad x + y < 0.$$

Daí,

$$\text{se } x + y \geq 0, \text{ então } |x + y| = x + y < x + (-y) = |x| + |y|$$

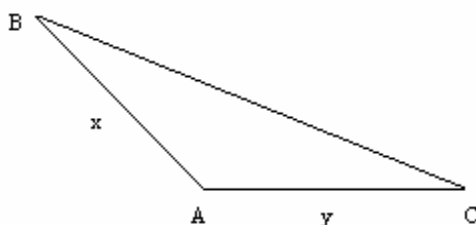
e

$$\text{se } x + y < 0, \text{ então } |x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$$

Observação

A desigualdade triangular tem esse nome devido à sua interpretação geométrica no plano:

Dado o triângulo ABC e considerando $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$, temos que $\overline{BC} < x + y$. A igualdade ocorre quando os pontos A , B e C são colineares.



EXERCÍCIOS

1) Resolva:

a) $|x| + |x - 5| = 8 - x$

b) $|5x + 4| \geq 4$

c) $|x - 2| - |x - 4| \leq 1 - x$

d) $|x + 1| + |x - 2| > 4$

e) $\frac{|x + 1|}{|2x - 1|} \leq 2$

2) Prove que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, valem as seguintes relações:

a) $\frac{1}{|y|} = \left| \frac{1}{y} \right|, y \neq 0$

b) $|x - y| \leq |x| + |y|$

c) $|x| - |y| \leq |x - y|$