8. OUTRAS FUNÇÕES

8.1 FUNÇÃO RAIZ QUADRADA

A função raiz quadrada é definida como

$$\begin{array}{rcl} f: R_+ & \to & R \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Temos que:

1) $f(0)=0$

2) $\text{Im}(f) = R_+$; este fato decorre da definição de raiz quadrada de um número.

3) f é estritamente crescente em todo o seu domínio.

Para demonstrar o item 3) vamos tomar x_1 e x_2 em R_+, com $x_1 < x_2$, e mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

De fato,

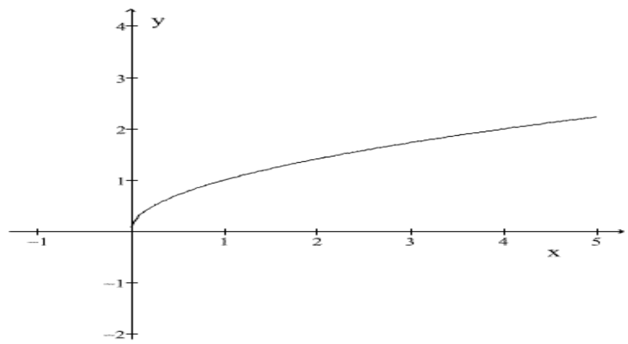
Sejam $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

$$y_1 = \sqrt{x_1} \Rightarrow y_1^2 = x_1 \text{ e } y_2 = \sqrt{x_2} \Rightarrow y_2^2 = x_2.$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1^2 < y_2^2 \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 < 0 \Rightarrow (y_1 - y_2).(y_1 + y_2) < 0.$$

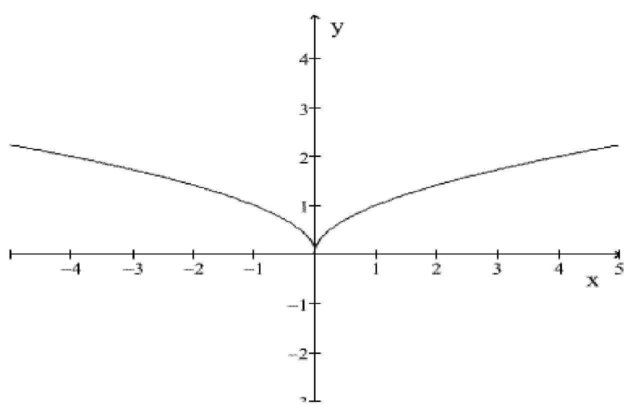
Como $\mathrm{y}_1 \geq 0$, $\mathrm{y}_2 \geq 0$ segue da expressão acima que $y_1 - y_2 < 0$, ou seja $y_1 < y_2$.

Seu gráfico é dado a seguir.



Exemplo

Dada a função $f(x) = \sqrt{|x|}$, de acordo com as considerações de função modular temos como gráfico



8.2 *FUNÇÃO CÚBICA*.

A função cúbica é definida como segue

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\to x^3 \end{aligned}$$

Vejamos que informações podemos obter da função para a construção do seu gráfico.

1) $f(0) = 0$

2) f é estritamente crescente em R.

Para demonstrar 2) vamos tomar x_1 e x_2 em R, com $x_1 < x_2$, e mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.
De fato,

Para $x_2 = 0$, temos que $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 < 0$, pois $x_1 < 0$. Daí, $f(x_1) < f(x_2)$.

Para $x_2 \neq 0$ fixo,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

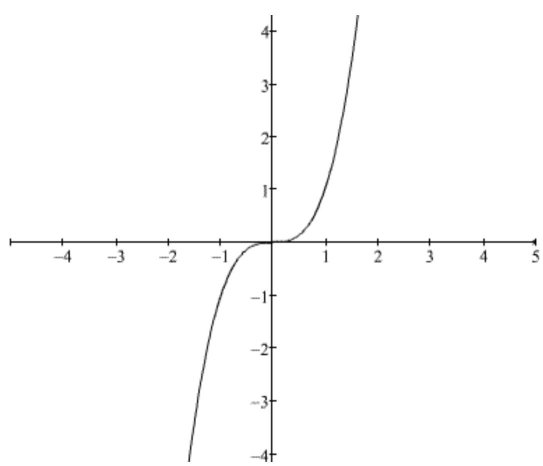
A expressão de 2^0 grau $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ em x_1, é sempre positiva, pois tem discriminante $\Delta = x_2^2 - 4x_2^2 = -3x_2^2 < 0$ e coeficiente de x_1^2 positivo. Desse modo, como $x_1 - x_2 < 0$, podemos concluir que

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0.$$

ou seja,

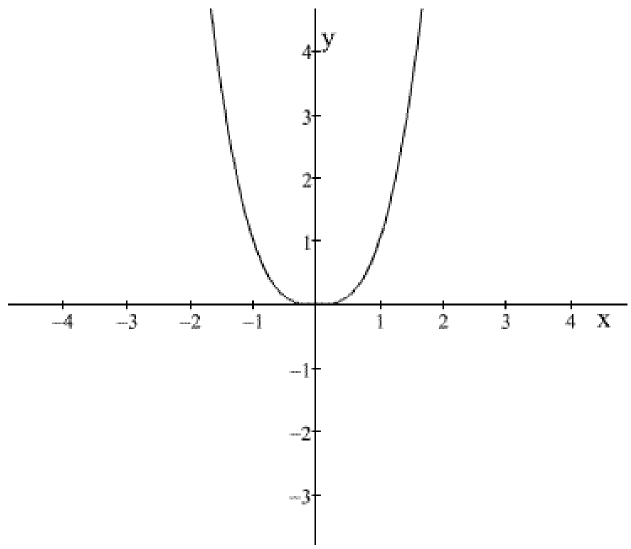
$$f(x_1) < f(x_2).$$

O gráfico da função cúbica deve ser apresentado com as informações destacadas inicialmente, além da obtenção de alguns pontos que pertencem ao mesmo. Não é possível justificar, neste contexto, porque a curva possui concavidade voltada para baixo, se $x < 0$ e para cima, se $x > 0$.



Exemplo

O gráfico da função $f(x) = |x^3|$ é dado a seguir



Observamos que o gráfico de $f(x) = |x^3|$ tem o mesmo aspecto do gráfico de $f(x) = x^2$, mas não é uma parábola. Podemos dizer que de uma maneira geral as duas funções têm o mesmo comportamento: crescimento, concavidade, sinal, etc.

8.3 *FUNÇÃO RECÍPROCA*

A função recíproca é definida como segue:

$$\begin{aligned} f:\ & R^* \to R \\ & x \ \to 1/x \end{aligned}$$

Vejamos que informações podemos obter da função para construção do seu gráfico.

1) O gráfico de $f(x)$ não intercepta o eixo Oy (pois $x \neq 0$) e não intercepta o eixo Ox (pois $(1/x) = 0$ não tem solução).

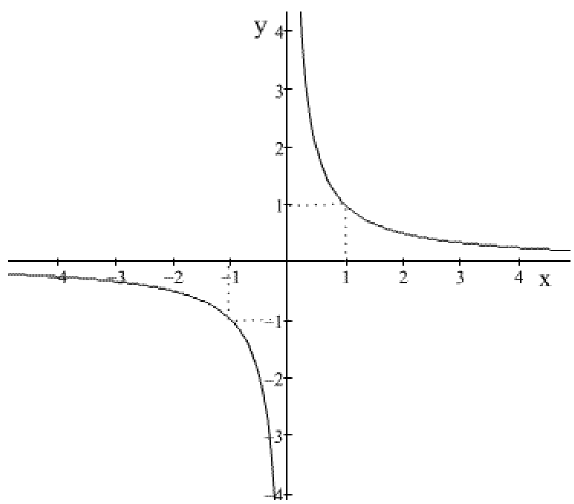
2) f é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$ e também em $(-\infty,0)$.

3) Im(f) = R^*.

4) $f(x) > 0$, se $x > 0$ e $f(x) < 0$, se $x < 0$.

5) A medida que tomamos valores para x cada vez mais próximos do zero e positivos, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez maiores e podem ser tão grandes quanto se queira. A medida que tomamos valores para x cada vez mais próximos de zero e negativos, os valores de $f(x)$ se tornam-se cada vez menores e podem ser tão pequenos quanto se queira.

A partir das considerações acima, podemos obter o gráfico da função. A curva é chamada hipérbole equilátera.



Vale a pena ressaltar que:

1) A observação 5) Pode ser formalizada assim:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Podemos também dizer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

2) As retas $y = 0$ e $x = 0$ são chamadas assíntotas horizontal e vertical, respectivamente, do gráfico de f.

Exemplo

O gráfico da função $f(x) = -1/x$ é dado a seguir