9. *CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS - TRANSLAÇÃO DE EIXOS*

9.1. *INTRODUÇÃO*

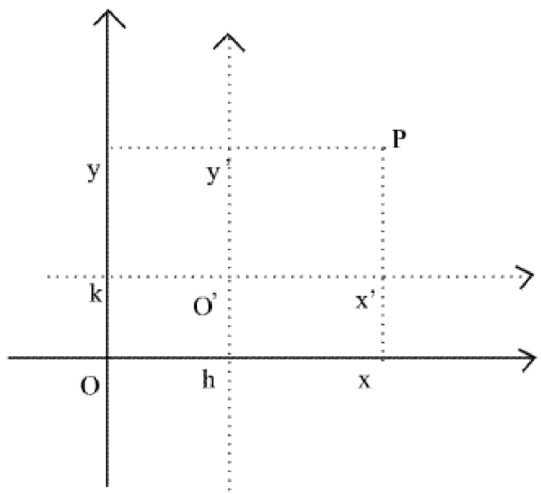
A partir do esboço do gráfico de uma função temos informações gerais sobre o comportamento da mesma: intervalos de crescimento e decrescimento, conjunto imagem, valores máximos ou mínimos, zeros etc.. Não precisamos saber, ponto a ponto, por onde a curva passa para obter tais informações, ou seja, não devemos ficar presos ao uso de tabelas na construção de um gráfico. Estas devem entrar como um dos recursos. Com efeito, conhecer valores do gráfico de uma função em geral não permite a sua construção correta (a menos que n seja "muito grande" ou que a função seja bem comportada como, por exemplo a função afim) se não sabemos preliminarmente o aspecto da curva. Por exemplo, já conhecemos a forma da parábola; logo, dada a função quadrática, para construirmos o seu gráfico basta conhecermos o seu vértice, suas raízes, interseção com eixo Oy e concavidade.

9.2. *TRANSLAÇÃO DE EIXOS*

Conhecendo-se a curva dada pela equação $y = f(x)$, um bom recurso para construção do gráfico de curvas do tipo $y - k = f(x - h)$ é a translação de eixos.

Em geral, se no plano em que os eixos Ox e Oy são dados, quando tomamos novos eixos paralelos aos anteriores, dizemos que ocorreu uma *translação de eixos*.

Consideremos que os eixos dados Ox e Oy foram transladados aos eixos O'x' e O'y' com nova origem O' = (h,k) em relação aos eixos dados.



Seja P um ponto de coordenadas (x, y) em relação aos eixos originais e (x', y') em relação aos novos eixos. Vamos relacionar (x,y) com (x', y').

Temos que:

$$\overline{O}\overline{A} = x = x' + h$$
$$\overline{O}\overline{B} = y = y' + k$$

Então, temos *as equações de translação de eixos*

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Se a equação de uma curva é dada em x e y então a equação em x' e y' é obtida substituindo-se x por $x' + h$ e y por $y'.+ k$.

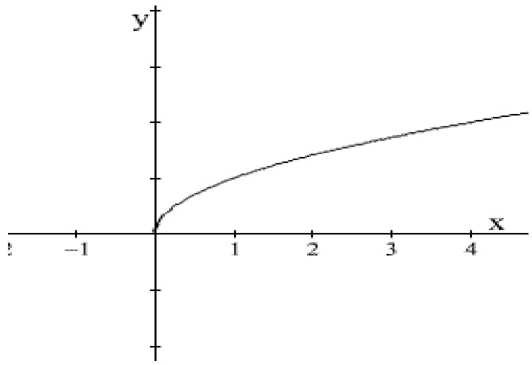
O gráfico da equação em x e y em relação aos eixos Ox e Oy é exatamente o mesmo conjunto de pontos que o gráfico da equação correspondente em x' e y' , em relação aos eixos O'x' e O'y'.

A forma de uma curva não é afetada pela posição dos eixos coordenados, no entanto sua equação é modificada.

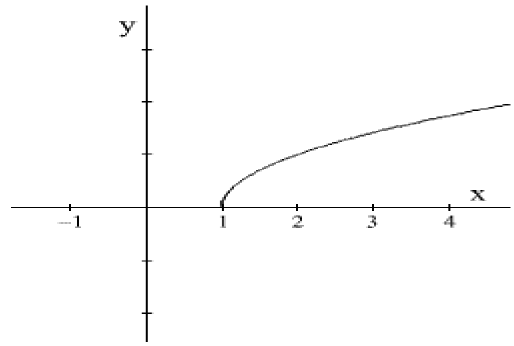
Exemplo

Consideremos as curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x - 1}$ e observemos os seus respectivos gráficos.

(I)



(II)



As curvas têm equações diferentes, no entanto a "forma" é a mesma em (I) e (II). Podemos dizer que:

O gráfico (II) pode ser obtido de (I) deslocando-se a curva (I) uma unidade para direita

ou

O gráfico (II) pode ser obtido de (I) transladando-se o eixo Oy em (I) de uma unidade para esquerda.

Se podemos tomar os eixos coordenados como desejamos, eles podem ser escolhidos de tal maneira que as equações sejam tão simples quanto possível.

Exemplos

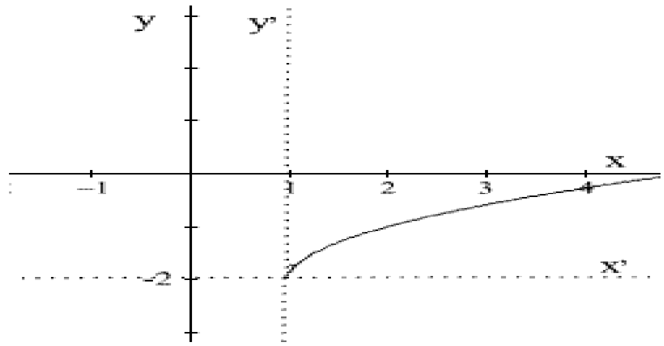
1) Dada a equação da curva $y + 2 - \sqrt{x-1} = 0$, vamos encontrar a equação da curva em relação ao sistema O'x' e O'y', após uma translação dos eixos a nova origem O' = (1,-2).

Solução: $x = x' + h = x' + 1$

$y = y' + k = y' - 2$

Substituindo na equação dada obtemos

$$y' - 2 + 2 - \sqrt{x' + 1 - 1} = 0 \Leftrightarrow y' = \sqrt{x'}$$



2) Vamos obter as equações a seguir em relação aos novos eixos O'x' e O'y' cuja origem O' é dada e construir os respectivos gráficos.

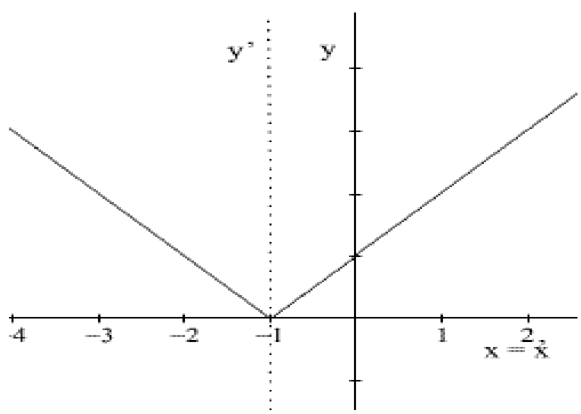
a) $y = |x + 1|$ O'= (-1, 0)

$x = x' + h = x' - 1$

$y = y' + k = y' + 0$

Substituindo na equação, temos

$$y = |x + 1| \Leftrightarrow y' + 0 = |x' - 1 + 1| \Leftrightarrow y' = |x'|$$

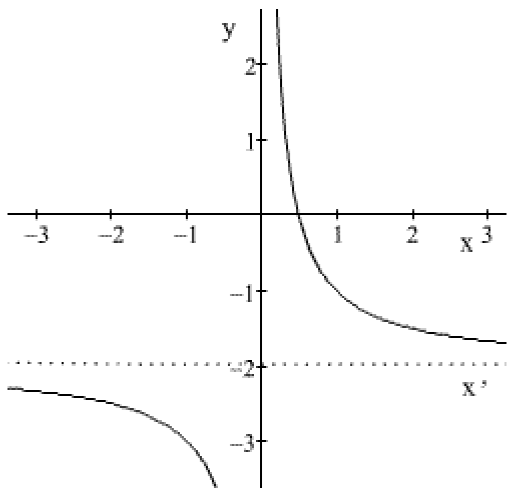


b) $y + 2 = \dfrac{1}{x}$ O' = (0. -2)

Solução: $x = x'$

$y = y' - 2$

Substituindo na equação, temos $y' = \dfrac{1}{x'}$



De modo geral, conhecendo-se o gráfico de uma função $y = f(x)$, para construirmos o gráfico de $y = f(x - h) + k$ basta efetuarmos uma translação de eixos considerando

$\begin{cases} x - h = x' \\ y - k = y' \end{cases}$ e construir o gráfico de $y' = f(x')$ em relação aos novos eixos auxiliares O'x' e O'y'.

Exemplos

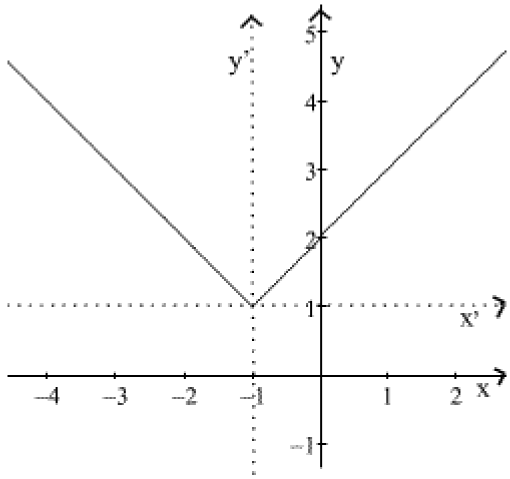
Vamos construir o gráfico das seguintes funções:

1) $f(x) = |x + 1| + 1$

Solução:

$y - 1 = |x + 1|$; considerando $y - 1 = y'$ e $x + 1 = x'$, temos $y' = |x'|$ e

O' = (-1, 1).

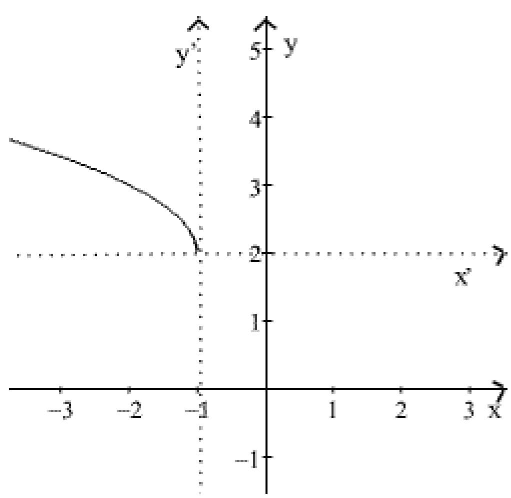


2) $f(x) = \sqrt{-x - 1} + 2$

Solução: $y - 2 = \sqrt{-x-1}$

Observemos que não devemos fazer $-x - 1 = x'$, se vamos usar translação de eixos. No entanto, podemos escrever a função como $y - 2 = \sqrt{-(x+1)}$ e considerar $\begin{cases} x+1 = x' \\ y-2 = y' \end{cases}$.

Assim. $y' = \sqrt{-x'}$ e O' = (-1,2)



EXERCÍCIOS

1) Construa o gráfico das seguintes funções, indicando para cada uma delas o domínio, imagem intervalos de crescimento e decrescimento.

a) $f(x) = (x+1)^3 - 1$ b) $f(x) = |(x+1)^3 - 1|$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - 1$ d) $f(x) = x + x\sqrt{(x-1)^2}$

e) $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } 0 < x < 2 \text{ e } x \ne 1 \\ x-1, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$ f) $g(|x|)$

g) $g(x-2)$ h) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$

2) Considere a função definida pela sentença: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1| - |x-1|}{x}, & \text{se } x \ne 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x)$ b) $-2f(x)$ c) $f(|x|)$ d) $-2 + f(x+1)$.