## 14. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A maioria das equações trigonométricas são ou reduzem-se a um dos três tipos a seguir:

1) sen x = sen a 2) cos x = cos a 3) tg x = tg β

Que são chamadas de equações fundamentais.

**1⁰ Caso: sen x = sen a**

Analisando o círculo trigonométrico (ver figura 1), temos que

- ou x e a têm a mesma imagem no círculo trigonométrico, isto é, $x = a + 2k\pi$, $k \in Z$.
- ou x e a têm imagens simétricas em relação ao eixo OY, isto é, $x = (\pi - a) + 2k\pi$, $k \in Z$.

Resumindo:

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \qquad\qquad\qquad k \in Z \\ x = (\pi\text{-}a) + 2k\pi \end{cases}$$

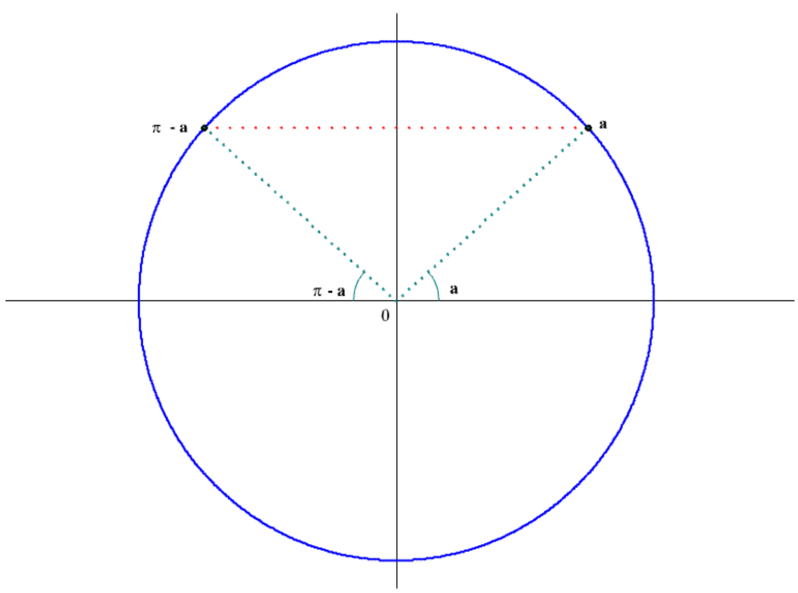


Figura 1

Exemplos:

1) $\text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{8}+2k\pi$, $k \in Z \Rightarrow$

$$x=\frac{\pi}{8}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{8}+2k\pi,\ k \in Z.$$

Logo, $S = \left\{x\in R; x=\frac{\pi}{8}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{8}+2k\pi,\ k\in Z\right\}$

2) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-(-\frac{\pi}{4})+2k\pi$,

$k \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k \in Z$.

Logo, $S = \left\{x\in R; x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z\right\}$.

3) $2\text{sen}^2 x - 3\text{sen} x + 1 = 0$

Fazendo sen x = t, obtemos

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = 1 \text{ ou } \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{2}$ ou $\text{sen } x = \text{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z\right)$ ou

$\left(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\right)$.

Logo, $S = \left\{x\in R; x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z\right\}$.

4) Resolva a equação anterior no intervalo $[0, 2\pi]$

Fazendo k = 0 na solução obtida no item anterior obtemos $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

**$2^0$ Caso: cos x = cos a**

Analisando o círculo trigonométrico (ver figura 2), temos que

- ou x e a têm a mesma imagem no círculo trigonométrico, isto é, $x=a+2k\pi$, $k \in Z$.

- ou x e a têm imagens simétricas em relação ao eixo OX, isto é, $x = -a + 2k\pi$, $k \in Z$.

Resumindo:

$$\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \qquad\qquad k \in Z \\ x = -b + 2k\pi \end{cases}$$

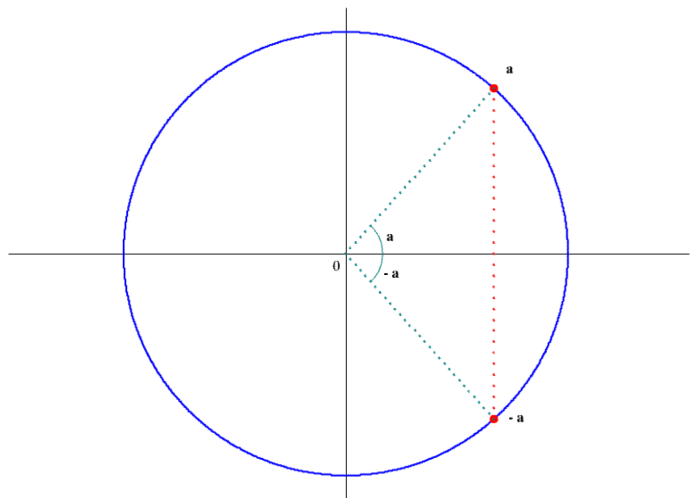


Figura 2

Exemplos:

1) cos x = -1 = cos π $\Rightarrow$ $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = -\pi + 2k\pi$, $k \in Z$ $\Rightarrow$ $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

Logo, S = $\{x \in R; x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z\}$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\Rightarrow$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

Logo, S = $\left\{x \in R; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

3) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\Rightarrow$ $3x =$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$ $\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

Logo, S = $\left\{x \in R; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$.

4) Resolva a equação anterior no intervalo [0, 2π].

Fazendo k variar no item anterior de maneira que as soluções pertençam ao intervalo [0, 2π],obtemos

S = $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right\}$.

**$3^0$ Caso: tg x = tg a**

Analisando o círculo trigonométrico (ver figura 3), temos que

- ou x e a têm a mesma imagem no círculo trigonométrico, isto é, $x = a + 2k\pi$, $k \in Z$.
- ou x e a têm imagens simétricas em relação a origem, isto é, $x = \pi + a + 2k\pi$, $k \in Z$, isto é, $x = a + (2k + 1)\pi$, $k \in Z$.

Resumindo: $x = a + k\pi$, $k \in Z$.

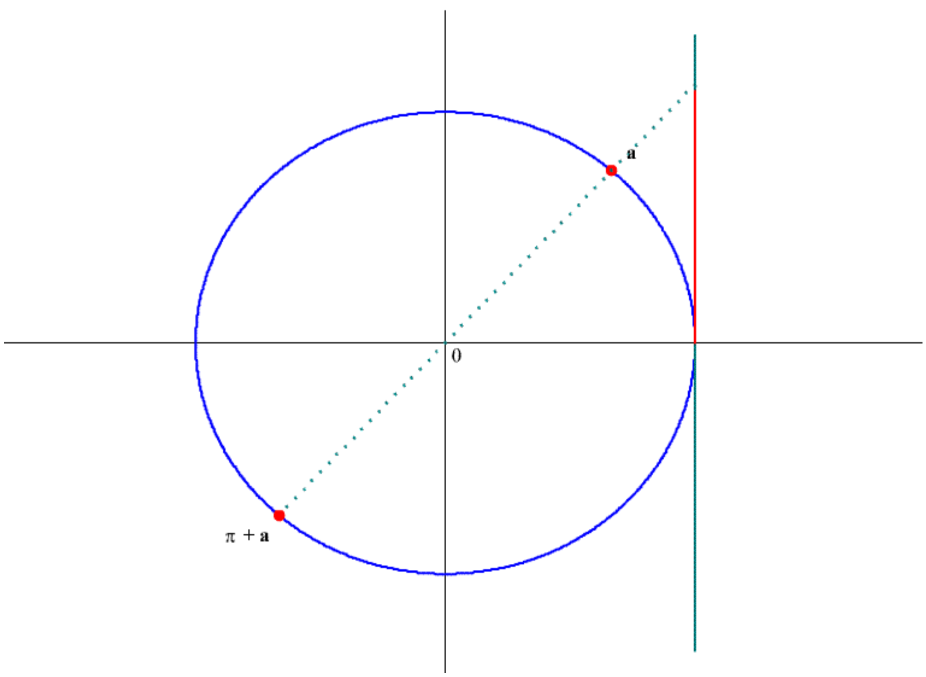


Figura 3

Exemplos:

1) $\text{tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } x = \text{tg } \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \ k \in Z.$

Logo, $S = \left\{ x \in R; x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \ k \in Z \right\}.$

2) $\text{tg } 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } 2x = \text{tg } \frac{\pi}{6} \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in Z \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z .$

Logo, $S = \left\{ x \in R; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z \right\}.$

3) $\text{tg } x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi, \ k \in Z.$

Logo, $S = \left\{ x \in R; x = \text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi, \ k \in Z \right\}.$