Apêndice	POTÊNCIAS E LOGARITMOS DE BASE e

A.1. INTRODUÇÃO

O número ***e*** é hoje considerado um dos números mais úteis e importantes da Matemática. Funções envolvendo potências de *e* ou, equivalentemente, logaritmos na base *e*, são muito utilizadas na Matemática Aplicada . Estas funções surgem naturalmente em muitos ramos do conhecimento humano, em problemas de origem as mais diversas, tais como: cálculo do tamanho de populações (Demografia), valor de investimentos (Finanças), idade de antiguidades (Arqueologia), problemas de aprendizagem (tratados pela Psicologia), etc. Daí serem os logaritmos na base ***e***, chamados de *logaritmos naturais*.

Várias são as maneiras de se introduzir logaritmos e potências na base ***e***. Nós o faremos de maneira pouco formal e (esperamos que seja!) mais atraente. Inicialmente, como motivação, usaremos um problema de juros, através do qual definiremos esse número Falaremos em seguida nas funções exponencial e logarítmica na base *e*. Finalmente, veremos aplicações às várias áreas do conhecimento.

A.2. UM PROBLEMA DE JUROS CONTÍNUOS E O NÚMERO e.

Suponhamos que o capital C_o é empregado à taxa de i % ao ano, de sorte que se retirado após uma fração p/q do ano, os juros J sejam proporcionais a esta fração, isto é, sejam iguais a

$$J = \frac{p}{q} \cdot \frac{i}{100} \cdot C_o$$

Vamos analisar os juros obtidos e, consequentemente o montante de um certo capital C_o aplicado á taxa de 100% ao ano, após um ano, nas seguintes situações:

1ª Situação: O capital só é retirado ao final de um ano.

Após 1 ano os juros são iguais

$$J = \frac{100}{100} C_0 = C_0$$

O montante é igual a $C_1 = C_0 + J = C_0 + \frac{100}{100} C_0 = 2C_0$

2ª Situação: O capital é retirado após 6 meses, ou seja, ½ ano, e reaplicado à mesma taxa:

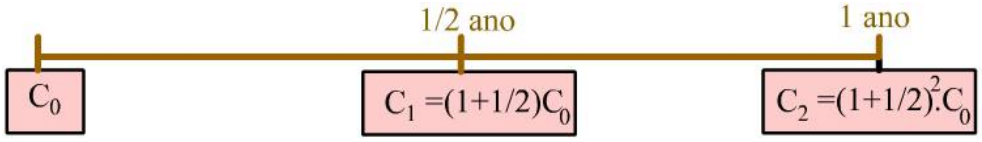
Após 6 meses os juros são iguais a:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{100} C_0 = \frac{C_0}{2}$$

O montante é igual a $C_1 = C_0 + \frac{C_0}{2} = C_0 \ (1 + \frac{1}{2})$

Reaplicando este capital mais 6 meses, à mesma taxa, ao final de 1 ano o novo capital é:

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{100} C_1 = C_1 (1 + \frac{1}{2}) = C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$



3ª Situação: De 4 em 4 meses (1/3 do ano), o capital é retirado e reaplicado à mesma taxa:

Após o primeiro período o capital é igual a :

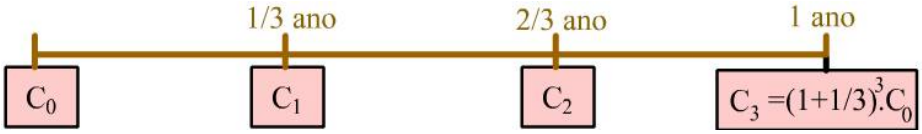
$$C_1 = C_0 + \frac{1}{3}C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

Após o segundo período o capital é igual a

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{3}C_1 = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$$

Após o terceiro período o capital é:

$$C_3 = C_2 + \frac{1}{3}C_2 = C_2\left(1+\frac{1}{3}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$$



Vamos comparar as três situações:

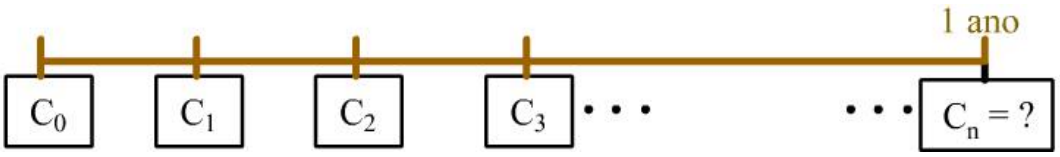
1ª) $C_1 = C_0(1+1) = 2C_0$

2ª) $C_2 = C_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = C_0\left(1+1+\frac{1}{4}\right) = C_0(2{,}250)$

3ª) $C_3 = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = C_0\left(1+3.\frac{1}{3}+3.\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right) = C_0.(2{,}37037...)$

Isto significa que a 3ª situação é a mais vantajosa! Um aplicador exigente vai querer que os períodos de capitalização sejam cada vez menores.

Suponhamos agora que o ano seja dividido em n partes iguais.



Decorrido o 1º período, os juros são iguais a $\frac{1}{n}C_0$ e o capital é

$$C_1 = C_0 + \frac{1}{n}C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Se após cada um desses períodos os juros são capitalizados, ao final de um ano, isto é, após n períodos, o capital é igual a

$$C_n = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Assim como nas situações 1, 2 e 3, a seqüência $C_n = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, isto é,

$$n_1 > n_2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} > \left(1+\frac{1}{n_2}\right)^{n_2}$$

Um aplicador exigente deve querer que os juros sejam capitalizados mais vezes possível, ou seja, capitalizados a cada instante. Assim, o capital ao final de um ano deverá ser

$$C = C_0 . \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente. Podemos até pensar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pode ser tão grande quanto se queira e, consequentemente, ao final do ano, o capital pode ser bastante grande, bastando para isto que os juros sejam capitalizados mais vezes. **Mas não é isto o que acontece! P**ode-se mostrar que, para qualquer valor de $n \in N^*$, temos

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

Portanto por mais vezes que os juros sejam capitalizados, ao final do ano, o capital não excede a $3C_0$, o triplo do capital inicial.

A esta altura faz sentido a seguinte pergunta: Que interpretação se pode dar à expressão $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$? Vejamos:

Para responder à pergunta formulada, usamos o fato que para todo n,

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

juntamente com o fato que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ é crescente. Concluímos daí que existe um número real, que indicamos por *e*, tal que

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \quad \text{e} \quad \mathbf{2 < e < 3}$$

Dizemos que o capital *C*, obtido quando C_0 for empregado durante um ano, à uma taxa de 100% ao ano, a ***juros contínuos*** é igual a $C = e.C_0$

Pode-se mostrar que o número *e* é irracional (e transcendente). A seqüência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ nos oferece aproximações decimais para *e*. Em geral, toma-se a aproximação

$$\boxed{e \cong \mathbf{2{,}718}}$$

Mais geral que o fato de $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ para $n \in \mathrm{N}^*$, é que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{para } x \in \mathrm{R}_+^*$$

A.3. O CASO GERAL DE JUROS CONTÍNUOS

Suponhamos agora que um certo capital C_0 seja aplicado a uma taxa de i % ao ano durante t anos.

Façamos $\frac{\mathrm{i}}{100} = \beta$ para simplificar os cálculos.

Se os juros são capitalizados apenas no final de t anos então

$J = \frac{i}{100} tC_0 = BtC_0$ e o novo capital será igual a $C_1 = C_0 + J = (1 + Bt)C_0$

Dividindo o período de t anos em n períodos, temos:

$$1^o \text{ período}: C_1 = C_0 + B.t\frac{1}{n}C_0 = \left(1+\frac{\beta.t}{n}\right)C_0$$

$$2^o \text{ período}: C_2 = \left(1+\frac{B.t}{n}\right)C_1 = \left(1+\frac{\beta.t}{n}\right)^2 C_0$$

.....

$$n-\text{ésimo período}: C_n = \left(1+\frac{\beta.t}{n}\right)^n C_0$$

Assim, fazendo n crescer, ou seja, capitalizando os juros a cada instante, temos que o capital C ao final de t anos é:

$$C = \lim_{n\to+\infty} C_o\,(1+\frac{\beta.t}{n})^n = C_o \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{\beta.t}{n})^n = C_0 \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{\beta.t}}\right)^{\frac{n}{B.t}}\right]^{\beta.t} = C_o\, e^{\beta.t}$$

Portanto $C = C_0.e^{Bt}$.

A.4. UM POUCO DA HISTÓRIA DO NÚMERO e

A invenção dos logaritmos é, como vimos, geralmente atribuída ao matemático John Napier (ou Neper). Os logaritmos de Napier não dependiam da idéia de uma base. Mas, num apêndice da tradução para o inglês de 1618 do trabalho original de Napier em latim, há uma tábua de logaritmos que são, efetivamente, logaritmos naturais. A tábua, que não contém vírgulas decimais, dá o logaritmo de 10 como sendo 2302584, ao passo que sabemos que $\ln 10 = \log_e 10 = 2{,}302584$. A tábua citada, devida provavelmente a William Oughtred, foi ampliada por John Speidell em sua obra New Logarithmus (1662) para os números de 1 a 1000.

Apesar de Napier não ter pensado em base para o seu sistema dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$. Por isso usa-se também o nome de logaritmos neperianos para os logaritmos de base *e*, embora esses não sejam exatamente os que Napier tinha em mente.

Em 1667 outro matemático escocês, James Gregory, mostrou como calcular logaritmos achando as áreas de paralelogramos inscritos entre uma hipérbole e suas assintotas, levando assim á expressão *logaritmos hiperbólicos*.

Com esta nova definição de logaritmos através de área o número *e* pode ser definido como sendo o valor da abscissa x_0 tal que a área da região limitada pelo eixo OX, a reta x =1, a hipérbole y = 1 / x e a reta $x = x_0$ seja igual a 1.

Fundamentando-se nos desenvolvimentos anteriores de séries exponenciais devidos a Newton e Leibniz, Leonhard Euler publicou en 1748 sua *Introduction in analysis infinitorum* , o mais notável tratado sobre o número *e*. Grande parte dessa descrição tão bem desenvolvida de sua teoria da função exponencial já fora dada antes.Com a idade de 21 anos, enquanto vivia na Corte de São Petersburgo, na Rússia, Euler escreveu *Meditações sobre experiências feitas recentemente sobre disparo de canhões*, onde sugeria: "Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos *e*, que é 2,718281..." Esse número era dado pela série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

O uso do símbolo *e* teve origem com Euler e assinala o reconhecimento por ele da existência de um número exato como soma da série e como base do sistema de *logaritmos hiperbólicos*. Usando a relação $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, Euler calculou *e* até a 23ª casa decimal. Devido a esses resultados *e* muitas vezes é chamado de número de Euler.

Euler pode ter sido o primeiro matemático a inferir que *e* é um número irracional. Depois de Liouville ter provado a existência de números transcendentes (1844) Charles Hermite provou que *e* é um número transcendente.

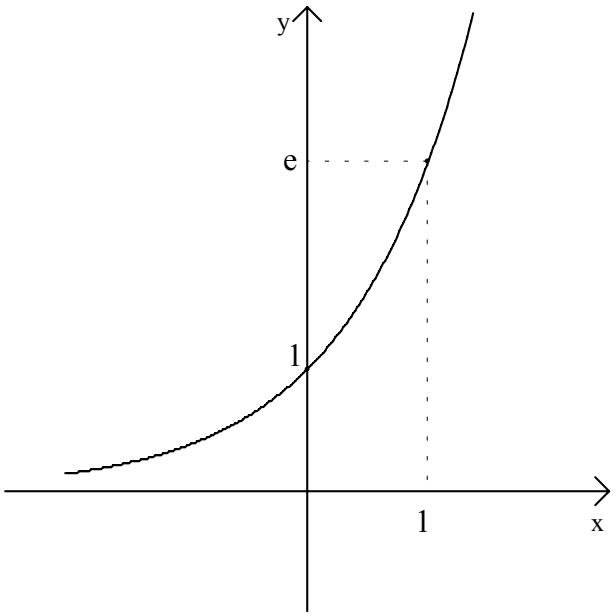
Devido a sua importância os logaritmos naturais ou neperianos têm a notação especial $\log_e x = \ln x$

A.5. AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA DE BASE e.

Seja a função exponencial na base *e*

$$f: R \to R_+^*$$
$$x \mapsto e^x$$

Como $e > 1$ então f é crescente e o seu gráfico tem o seguinte aspecto



Definição: Dado $x \in R_+^*$, o logaritmo natural de x (ou o logaritmo neperiano de x) é o logaritmo de x na base *e*, que é denotado por lnx ou $\log_x$.

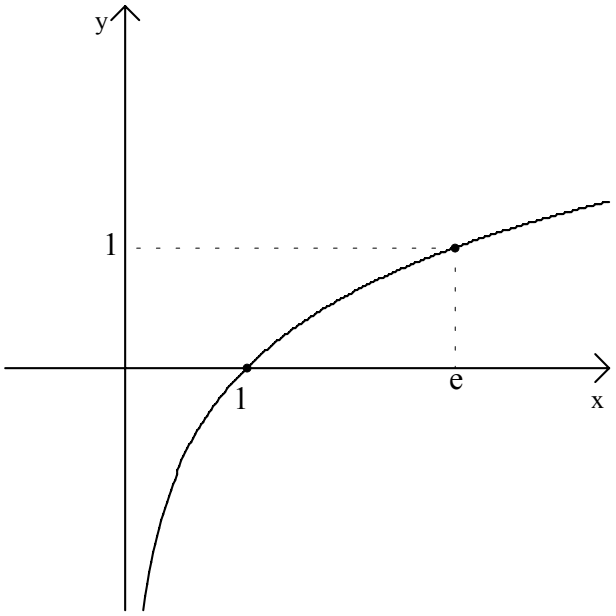
Isto é, por convenção,

$$\log_e x = \ln x$$

Como $e > 1$, é crescente a função logarítmica nesta base

$$f : R \to R_+^*$$
$$x \mapsto lnx$$

e o seu gráfico tem o seguinte aspecto



A.6. APLICAÇÕES

Observemos que no exemplo de juros contínuos, visto em A.3. temos que a variação do capital em cada instante é proporcional ao capital existente no dado instante (isto é, os juros são capitalizados instantaneamente e são proporcionais ao capital existente naquele instante), a taxa de proporcionalidade é $B = \frac{i}{100}$. Dado o capital no instante inicial igual a C_0, o capital depois de t anos é igual a $C(t) = C_0 e^{Bt}$

De forma análoga, suponhamos uma determinada grandeza *Q* que varie com o tempo t. Indiquemos por Q(t) o valor dessa grandeza no instante t.
Suponhamos também que a variação da grandeza (crescimento ou decrescimento), em cada instante t, seja proporcional ao valor da própria grandeza no instante t.

Sejam $\beta > 0$ a constante de proporcionalidade (absoluta) e $Q_0 = Q(0)$ a quantidade inicial da grandeza. Usando argumentos análogos aos usados para juros contínuos chegamos à conclusão que :
$Q(t) = Q_0\, e^{\beta .t}$ se Q(t) cresce com o tempo e $Q(t) = Q_0\, e^{-\beta .t}$ se Q(t) decresce com o tempo. Em ambos os casos, podemos escrever $Q(t) = Q_0\, e^{\alpha .t}$ com $|\alpha| = \beta$ e $\alpha > 0$ se Q(t) cresce com o tempo e $\alpha < 0$ se Q(t) decresce. Dizemos que α é a constante de proporcionalidade da grandeza Q.

Este modelo matemático se aplica às situações mais diversas, como ilustraremos a seguir:

1. Juros Contínuos

Exemplo:

Empregando-se um capital C_0 a juros contínuos de 20% ao ano, em quanto tempo esse capital será dobrado?

Solução: Temos que $C(t) = C_0\, e^{\frac{20}{100}t}$. Queremos encontrar o tempo t para que $C(t) = 2C_0$

Assim,

$$2C_0 = C_0 e^{\frac{20}{100}i} \Rightarrow 2 = e^{\frac{t}{5}} \Rightarrow \ln 2 = \frac{t}{5} \Rightarrow t = 5.\ln 2 \cong 5(0{,}6931) \cong 3{,}46$$

ou seja, aproximadamente 3 anos e meio.

De modo geral, se a taxa de juros contínuos é de i% ao ano, então um capital C_0 leva o tempo $t = 100.\frac{\ln(s)}{i}$ anos para tornar-se *s* vezes o seu valor inicial. De fato:

$$s.C_0 = C_0 e^{\frac{i}{100}t} \Rightarrow s = e^{\frac{i}{100}t} \Rightarrow \ln(s) = \frac{i}{100}t \Rightarrow t = \frac{100.\ln(s)}{i} \text{ anos}$$

2. Desintegração Radioativa

.

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radiativo é proporcional á massa da substância original presente no corpo naquele instante. Como a quantidade da substância original decresce temos que a constante de proporcionalidade α é um número negativo. Cada substância radioativa tem sua taxa de desintegração k, tal que $\alpha = -k$, que é determinada experimentalmente.

Consideremos um corpo de massa M_0 formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é k. Num instante t qualquer, a massa da substância será de $M(t) = M_0\, e^{-kt}$ $(k > 0)$. Para cada unidade de tempo considerada a constante k é alterada proporcionalmente.

Na prática a constante k fica determinada a partir de um número básico chamado de *meia-vida* da substância. A *meia-vida* de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância. Vejamos alguns exemplos:

Substância	**Meia Vida**
Polônio 218	2 min 45 seg
Polônio 214	1,64x10-^{4} seg
Urânio (isótopos)	da ordem de 10^9 anos
Carbono 14	5570 anos

Se sabemos que certo elemento radioativo tem *meia-vida* igual a t_o unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0 Assim,

$$\frac{1}{2} = e^{-k.t_o} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -kt_o \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_o}$$

Isto nos mostra como calcular a taxa e desintegração k quando se conhece a meia-vida t_o. Reciprocamente, tem-se $t_o = \frac{\ln 2}{k}$, o que permite calcular a meia-vida t_o em função da taxa k.

3. O método do Carbono 14 (C^{14})

O carbono 14 é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeamento da Terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} se mantém constante. O C^{14} é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais. Quando o ser morre, a absorção cessa mas, o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira. Para isso precisamos saber que a *meia-vida* do C^{14} é de 5570 anos. Segue-se daí que a constante de desintegração do C^{14} é

$$k = \frac{\ln 2}{5570} = 0{,}0001244$$

Exemplo: Vejamos como este conhecimento foi usado para resolver uma controvérsia. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur (que viveu há mais de 1500 anos). Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa *M* hoje existente na mesa é 0,894 vezes a massa M_O de C^{14} que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa. *M*o é também a massa de C^{14} que existia na mesa quando ela foi feita a t anos. Temos que:

$$M = M_o e^{-kt} \Rightarrow \frac{M}{M_o} = e^{-kt} \Rightarrow 0{,}894 = e^{-0{,}0001244t} \Rightarrow t = \frac{-ln0{,}894}{0{,}0001244}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{0{,}1121}{0{,}0001244} = 901$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda ela deveria ter mais de 1500 anos.

4. Resfriamento de um corpo

Uma situação análoga à da desintegração radioativa é a de um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água, por exemplo) cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. *A lei do resfriamento de Newton* diz que, nessas condições, a diferença de temperatura , entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, essa lei se traduz matematicamente. Chamando T_o a temperatura no instante t = 0 e T_a a temperatura do ambiente (ou do meio) temos que:

$$T - T_a = (T_o - T_a)e^{-kt} \ (k > 0) \Rightarrow T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt}$$

Assim, a temperatura num instante t qualquer é dada por

$$T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt}$$

(Represente graficamente a função T)

A constante k depende do material de que é constituída a superfície do objeto. A lei do resfriamento vale também (com expoente positivo) para o aquecimento de um corpo frio colocado num ambiente mais quente.

Exemplo:

Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30°. A água que fervia numa panela, 5 minutos depois de apagado o fogo, tem a temperatura de 65°. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38° ?

Solução: Sabendo que a água ferve a 100°, temos:

$$T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt} = 30 + (100 - 30)e^{-kt} = 30 + 70e^{-kt}$$

Usando a informação que T = 65° para t = 5 min, calculamos a constante k

$$65 = 30 + 70e^{-5k} \Rightarrow 35 = 70e^{-5k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-5k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0{,}693}{5} = 0{,}1386$$

Assim, temos que:

$T(t) = 30 + 70e^{-0{,}386t}$ e como queremos encontrar o valor de t para T=38°:

$$38 = 30 + 70e^{-0{,}1386t} \Rightarrow \ln\left(\frac{8}{70}\right) = -0{,}1386t \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{70}{8}\right)}{0{,}1386} = \frac{2{,}1691}{0{,}1386} = 15{,}65$$ o que

corresponde a pouco mais de 15 minutos e meio.

A.7. EXERCÍCIOS.

A.1. A que taxa anual de juros contínuos devo investir meu capital de maneira que ele dobre ao fim de 5 anos?

A.2. Um investidor aplica na Bolsa de Valores determinada quantia que triplica em 30 meses. Em quanto tempo esta quantia será quadruplicada, supondo que o aumento é proporcional à quantidade presente em cada instante?

A.3. Um ator de cinema precisava fazer um regime para emagrecer em virtude de seu papel num novo filme. O diretor exigiu que ele perdesse a terça parte do seu peso, que era de 120kg, seguindo uma dieta racional que o emagrecesse proporcionalmente ao peso de cada instante. Nestas condições, sabendo-se que iniciada a dieta, o artista emagreceu 20kg em 40 dias, quanto tempo será necessário para que ele comece a atuar no filme?

A.4. A *escherichia coli* é uma bactéria encontrada no intestino humano onde, evidentemente, o número de indivíduos é aproximadamente constante. Todavia, quando cultivada em condições ideais de laboratório, sua população duplica a cada 20min. Qual a expressão que dá o número de bactérias após um tempo t? Numa experiência ideal de laboratório, iniciada com 10 bactérias, quantas deverão existir após 5 horas e 40min? E depois de 5 horas e meia?

A.5. Se, no instante t = 0, um recipiente contém um número N_0 de bactérias se reproduzindo normalmente, então num instante t > 0, o número de bactérias existente no recipiente será

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

onde a constante k depende do tipo de bactéria. Suponha que uma cultura de 100 bactérias se reproduza em condições favoráveis. Doze horas mais tarde contamos 500 bactérias na cultura. Quantas bactérias haverá 2 dias depois do início da experiência?

A.6. Numa certa colônia, bactérias nascem e morrem em taxas proporcionais à quantidade presente em cada instante. Supondo que a colônia dobra de tamanho em 24 horas e que teria seu tamanho reduzido à metade em 8 horas, se não houvesse nascimento, determine a quantidade de bactérias presentes em um instante t qualquer, e as taxas de proporcionalidade de nascimento e morte.

A..7. Cem gramas de cana de açúcar em água estão sendo transformadas em dextrose, numa razão que é proporcional á quantidade não-transformada. Determine a quantidade de açúcar transformado em um instante t qualquer, sabendo-se que após 10 minutos foram transformadas 50gr.

A.8. O isótopo radioativo tório 234 desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente. Se 100 miligramas desta substância são reduzidas a 82,04 miligramas em uma semana, determine a expressão para a quantidade presente em qualquer tempo e a meia-vida desta substância.

A.9. Uma substância radioativa decompõe-se a uma taxa proporcional à quantidade presente e no fim de 1500 anos ela se reduz à metade da quantidade original. Em quantos anos a quantidade original reduz-se de $\frac{3}{4}$? Qual a quantidade de substância encontrada no fim de 2000 anos?

A.10. Se 10% de um certo material radioativo se desintegram em 5 dias, qual é a meia-vida do material?

A.11. Na caverna de Lascaux na França , famosa pelas notáveis pinturas feitas em suas paredes por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade do C^{14} era 0,145 vezes a radioatividade normalmente encontrada num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão encontrado na caverna e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas.

A.12.A meia-vida do cobalto radioativo é de 5,27 anos. Suponha que um acidente nuclear tenha levado o nível de radiação por cobalto, numa certa região, a 100 vezes o nível aceito para a habitação humana. Ignorando a presença provável de outros elementos radioativos, determine quanto tempo deverá passar para que a região seja novamente habitável.

A.13. Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém passado seja de 90°. Um minuto mais tarde, a temperatura já diminuiu para 85°C, numa sala a 20°C. Considerando válida a lei do resfriamento de Newton, determine o tempo para que a temperatura do café atinja 65°C.

A.14. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto. O perito da polícia chegou à 1:00h da madrugada e imediatamente tomou a temperatura do cadáver que era de 34,8°. Uma hora mais tarde ele tomou novamente a temperatura e encontrou 34,1°. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima era mantida constante a 20°. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5°.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

A.1. i% ≅ 13,86%

A. 2. $t = \frac{\ln 4}{0{,}0366}$ meses (aproximadamente 37 meses e 27 dias)

A. 3. $t = \frac{\ln 1{,}5}{0{,}0045}$ dias (aprox. 90 dias)

A. 4. $N(t) = e^{0{,}0346t}$ t em min. Após 5h:40min $N \cong 1.310.720$ e após 5h:30min $N \cong$ 1.853.600 .

A. 5. $N = 100e^{6{,}4368}$

A. 6. $Q(t) = Q_0 e^{(\ln 2/24)t}$; taxas: (nascimento $\frac{\ln 2}{6}$), (morte $\frac{\ln 2}{8}$)

A. 7. $Q(t) = 100 - 100e^{-0{,}0693t}$

A. 8. $\mathrm{Q(t)} = \mathrm{Q_0 e^{In(0{,}824)t}}$; meia vida; $t = \frac{\ln 2}{0{,}1989}$ semanas (aprox. 3 semanas e 3 dias)

A. 9. $t = \frac{\ln 4}{0{,}0005}$ anos (aprox. 2773 anos); $Q = Q_0 e^{-1}$

A. 10. $t = \frac{\ln 2}{0{,}0209}$ dias (aprox. 33 dias)

A. 11. $t = \frac{-5570\ln(0{,}145)}{\ln 2}$ anos (aprox. 15518 anos)

A. 12. $t = \frac{(10{,}54)\ln 10}{\ln 2}$ anos (aprox. 35 anos e 1 mês)

A. 13. $t = \frac{\ln(1{,}5555)}{0{,}0770}$ minutos (aprox. 5’40’’)

A. 14. O intervalo de tempo decorrido da hora em que se deu o assassinato até a chegada do perito foi de $\Delta t = \frac{\ln(165/148)}{\ln(148/141)}$ h (aprox. 2h 15min)