5. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

5.1. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são chamadas de *equações exponenciais*. Por exemplo,

$$2^x = \frac{1}{16}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25; \quad 4^x - 2^x - 2 = 0$$

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de equações com a respectiva solução. Na maioria dos casos a aplicação das propriedades de potências reduz as equações a uma igualdade de potências da mesma base

$$a^x = a^\alpha$$

o que, usando o fato que a função exponencial é injetora, nos permite concluir

$$a^x = a^\alpha \Rightarrow x = \alpha \quad , \ a \in R_+^* - \{1\}$$

e portanto, resolver a equação.

Exemplos

1) Resolver as seguintes equações exponenciais

a) $2^x = 16$

Solução:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$
$$\therefore \ S = \{ 4 \} .$$

b) $(100)^{x} = 0,001$

Solução:

$$(100)^{x} = 0,001 \Rightarrow (10)^{2x} = (10)^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore \ S = \{ -\frac{3}{2} \}.$$

c) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$

Solução:

$$5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480 \Rightarrow 5^{4x}\left(5^{-1} - 1 - 5 + 5^{2}\right) = 480 \Rightarrow 5^{4x}(\frac{96}{5}) = 480 \Rightarrow$$

$$5^{4x} = 25 \Rightarrow 5^{4x} = 5^{2} \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ S = \{ \frac{1}{2} \}.$$

d) $9^{x} + 3^{x+1} = 4$

Solução:

$$9^{x} + 3^{x+1} = 4 \Rightarrow 3^{2x} + 3.3^{x} - 4 = 0$$

Fazendo $y = 3^{x}$,temos:

$$y^{2} + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

Observemos que y = –4 não satisfaz porque $y = 3^{x} > 0$.

De y = 1, temos:

$$3^{x} = 1 = 3^{0} \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore \ S = \{0\}.$$

e) $5.(2)^x = 4^x$.

Solução:

$$5.(2)^x = 4^x . \Rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^x = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5$$

$$\therefore \ S = \{\log_2 5\}$$

2) Resolver em R_+ as equações:

a) $x^{x^2-2} = 1$

Solução:

Inicialmente vamos verificar se 0 ou 1 são soluções da equação. Como não se define 0^{-2}, x = 0 não é solução da equação.

Fazendo x = 1 na equação obtemos $1^{-1} = 1$ o que é uma identidade e portanto, x = 1 é solução. Supondo x > 0 e x $\neq$ 1, podemos usar a injetividade da função exponencial

$$x^{x^2-2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \ S = \{1, \sqrt{2}\}.$$

b) $x^{4-2x} = x$

Solução:

Examinemos inicialmente se 0 ou 1 são soluções da equação

$$0^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$

$$1^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ é solução}$$

Supondo x > 0 e x $\neq$ 1 temos

$$x^{4-2x} = x \Rightarrow 4 - 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \; S = \{ 0, 1, \frac{3}{2} \}$$

5.2. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

As equações envolvendo logaritmos são chamadas de *equações logarítmicas* e são resolvidas aplicando-se propriedades dos logaritmos e o fato da função logarítmica ser injetora. Assim, procuramos escrever todos os logaritmos envolvidos numa mesma base e usamos a condição

$$\boldsymbol{log_a x = log_a \alpha \Rightarrow x = \alpha}$$

Além disto, devemos inicialmente analisar as condições de existência dos logaritmos, levando-se em conta os domínios de definição do logaritmo e da base.

Exemplos

Resolva as seguintes equações:

1) $\log_3(x+2) = 1 + \log_{1/3} x$

Solução:

Condições de existência:

$$x + 2 > 0 \text{ e } x > 0 \Rightarrow x > 0 \qquad (\text{I})$$

Temos

$$\log_3(x+2) = 1 + \log_{1/3} x \Rightarrow \log_3(x+2) = \log_3 3 - \log_3 x \Rightarrow \log_3(x+2) = \log_3\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow$$

$$x + 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1 \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é:

$$S = \{ 1 \}$$

2) $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_{3x} 9} = 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x > 0 \text{ e } 3x \neq 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{3} \qquad (\text{ I })$$

Temos

$$\log_3 x + \frac{1}{\log_{3x} 9} = 2 \Rightarrow \log_3 x + \log_9 3x = 2 \Rightarrow \log_3 x + \frac{\log_3 3x}{\log_3 9} = \log_3 3^2 \Rightarrow$$

$$\log_3 x + \frac{\log_3 3x}{2} = \log_3 9 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 \sqrt{3x} = \log_3 9 \Rightarrow \log_3\left(x\sqrt{3x}\right) = \log_3 9 \Rightarrow$$

$$x\sqrt{3x} = 9 \Rightarrow \left(x\sqrt{3x}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow 3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é S = { 3 }.

3) $x^{\log_2 x} = 4x$

Solução:

Condição de existência: $x > 0$ (I)

$$x^{\log_2 x} = 4x \Rightarrow \log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2(4x) \Rightarrow \left(\log_2 x\right)\left(\log_2 x\right) = \log_2 4 + \log_2 x \Rightarrow$$

Fazendo $\log_2 x = y$, obtemos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -1 \Rightarrow \log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = -1 \Rightarrow$$

$$x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é: $S = \{ \frac{1}{2}, 4 \}$.

4) $(x)^{\log_x (x+3)} = 7$

Solução:

Condições de existência:

$$x > 0,\ x \neq 1 \text{ e } x > -3 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \neq 1 \qquad \text{(I)}$$

Temos

$$(x)^{\log_x (x+3)} = 7 \Rightarrow x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é: $S = \{ 4 \}$.

5) $\log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-2} + 1\right)$

Solução:

Condições de existência: como $9^{x-2} + 7 > 0$ e $3^{x-2} + 1 > 0 \quad \forall\, x \in R$, concluímos que a equação está definida para todo número real x.

Vejamos:

$$\log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-2} + 1\right) \Rightarrow \log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = \log_2 4 + \log_2\left(3^{x-2} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = \log_2\left(4\left(3^{x-2} + 1\right)\right) \Rightarrow 9^{x-2} + 7 = 4.3^{x-2} + 4 \Rightarrow$$

$$3^{2x}.3^{-4} + 7 = 4.3^{x}.3^{-2} + 4.$$

Fazendo $3^x = y$ obtemos a equação $y^2 - 36y + 243 = 0$, que tem como solução $y = 9$ ou $y = 27$.

Portanto,

$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$

$$3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

Assim, a solução da equação é: S = { 2, 3 }.

5.3. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Inequações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são *inequações exponenciais*. Por exemplos

$$5^x > 20;\ \ 3^{-x} < \frac{1}{81};\ \ 4^x - 6.2^x + 8 < 0.$$

Assim como no caso das equações exponenciais, em geral, as inequações podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base, através da aplicação das propriedades de potências. Usamos então a Proposição 4.2:

i) Se $a > 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 < x_2$

ii) Se $0 < a < 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 > x_2$

Em outros casos a inequação é resolvida com a aplicação dos logaritmos.

Exemplos

1) Resolver as seguintes inequações exponenciais:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

Solução:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

Como a base é menor que 1, temos que x < 4.

$$\therefore\ S =]-\infty, 4[\ .$$

b) $4^x - 6.2^x + 8 < 0$

Solução:

$$4^x - 6.2^x + 8 < 0 \Rightarrow \left(2^x\right)^2 - 6.2^x + 8 < 0$$

Fazendo, $2^x = y$, temos

$$y^2 - 6y + 8 < 0 \Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow 2 < 2^x < 2^2$$

Como a base é maior que 1, então $1 < x < 2$

$$\therefore\ S\ =\ ]1,2[$$

c) $3^x < 5$

Solução:

Aplicando logaritmo na base 3 nos dois lados da desigualdade e conservando o sinal da desigualdade uma vez que a base do logaritmo é maior que 1 temos

$$3^x < 5 \Rightarrow \log_3\left(3^x\right) < \log_3 5 \Rightarrow x < \log_3 5$$

$$\therefore\ S\ =\ ]-\infty, \log_3 5[$$

2) Resolver em R_+ a inequação $x^{4x-3} < 1$

Solução:

Devemos considerar três casos:

i) Vamos verificar se 0 ou 1 são soluções da inequação.

Como 0^{-3} não está definido, x = 0 não é solução da inequação.

Se $x = 1$, temos $1^x < 1$ o que não se verifica, logo $x = 1$ não é solução. A solução neste caso é $S_1 = \varnothing$.

ii) x > 1 (I)

$$x^{4x-3} < 1 \Rightarrow x^{4x-3} < x^0 \Rightarrow 4x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{4} \qquad \text{(II)}$$

A solução neste caso deve satisfazer simultaneamente (I) e (II), portanto a solução $S_2 = \varnothing$.

iii) 0 < x < 1 (III)

$$x^{4x-3} < 1 \Rightarrow x^{4x-3} < x^0 \Rightarrow 4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4} \qquad \text{(I V)}$$

A solução neste caso deve satisfazer simultaneamente (III) e (IV), portanto $S_3 =]\frac{3}{4}, 1[$.

A solução da inequação é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]\frac{3}{4}, 1[$.

5.4. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para resolvermos inequações envolvendo logaritmos, procuramos colocar os logaritmos numa mesma base, usando as propriedades, analisamos as condições de existência e usamos as implicações

i) Para $a > 1$, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$

ii) Para $0 < a < 1$, $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$

Exemplos

Resolva as seguintes inequações logaritmicas:

1) $\log_{1/2}\left(x^2 - x - 3/4\right) > 2 - \log_2 5$

Solução:

Condição de existência:

$$x^2 - x - 3/4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1/2[\ \cup \ ]3/2, +\infty[\qquad (\text{I})$$

Temos,

$$\log_{1/2}\left(x^2 - x - 3/4\right) > 2 - \log_2 5 \Rightarrow -\log_2\left(x^2 - x - 3/4\right) > \log_2 4 - \log_2 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2\left(x^2 - x - 3/4\right) < \log_2 (5/4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 3/4 < 5/4 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x \in]-1, 2[\qquad (\text{II})$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S =]-1, -\frac{1}{2}[\ \cup \ ]\frac{3}{2}, 2[.$$

2) $\log_5(x-2) + \dfrac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x - 2 > 0 \ \text{e} \ x - 3 > 0 \ \text{e} \ x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow x > 3 \ \text{e} \ x \neq 4 \qquad (\text{I})$$

Consideremos

$$\log_5(x-2)+\frac{1}{\log_{(x-3)}5}>\log_5 2\Rightarrow\log_5(x-2)+\log_5(x-3)>\log_5 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_5(x-2)(x-3)>\log_5 2\Rightarrow(x-2)(x-3)>2\Rightarrow x^2-5x+4>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in]-\infty,1[\quad\cup\quad]4,+\infty[\qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S=\ ]4,+\infty[\,.$$

3) $|2+\log_2 x|\geq 3$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \qquad (\text{ I })$$

Vejamos:

$$|2+\log_2 x|\geq 3\Rightarrow 2+\log_2 x\geq 3 \text{ ou } 2+\log_2 x\leq -3\Rightarrow\log_2 x\geq 1 \text{ ou } \log_2 x\leq -5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_2 x\geq\log_2 2 \quad\text{ou}\quad \log_2 x\leq\log_2 2^{-5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\geq 2 \text{ ou } x\leq 2^{-5} \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S=\ ]0,2^{-5}[\quad\cup\quad[2,+\infty[\,.$$

4) $x^{(\log_3 x)}\leq 9x$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \qquad (\text{ I })$$

Temos

$$x^{(\log_3 x)} \le 9x \Rightarrow \log_3\left(x^{(\log_3 x)}\right) \le \log_3(9x) \Rightarrow (\log_3 x)(\log_3 x) \le \log_3 9 + \log_3 x \Rightarrow$$

Fazendo $\log_3 x = y$, obtemos

$$y^2 - y - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le y \le 2 \Rightarrow \log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le \log_3 9 \Rightarrow \Rightarrow 3^{-1} \le x \le 9 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S = [\frac{1}{3}, 9].$$

5) $x^{\log x + 1} > 100x$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \qquad (\text{ I })$$

Assim

$$x^{\log x + 1} > 100x \Rightarrow x^{\log x}.x > 100x \Rightarrow x^{\log x} > 100 \Rightarrow \log\left(x^{\log x}\right) > \log 100 \Rightarrow$$

$$(\log x)^2 > 2 \Rightarrow \log x > \sqrt{2} \text{ ou } \log x < -\sqrt{2} \Rightarrow x > 10^{\sqrt{2}} \text{ ou } x < 10^{-\sqrt{2}} \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é:

$$S =]0, 10^{-\sqrt{2}}[\quad \cup \quad]10^{\sqrt{2}}, +\infty[.$$

4) $\log_2(x-1) \le \log_{(x-1)} 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x - 1 > 0 \text{ e } x - 1 \ne 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \text{ e } x \ne 2 \qquad (\text{ I })$$

Assim,

$$\log_2(x-1) \le \log_{(x-1)}2 \Rightarrow \log_2(x-1) \le \frac{1}{\log_2(x-1)}$$

Fazendo $\log_2(x-1) = y$, obtemos

$$y \le \frac{1}{y} \Rightarrow y - \frac{1}{y} \le 0 \Rightarrow \frac{y^2-1}{y} \le 0 \Rightarrow y \le -1 \text{ ou } 0 < y \le 1 \Rightarrow$$

$$\log_2(x-1) \le -1 \quad \text{ou} \quad 0 < \log_2(x-1) \le 1 \quad \Rightarrow$$

$$\log_2(x-1) \le \log_2 2^{-1} \quad \text{ou} \quad \log_2 1 < \log_2(x-1) \le \log_2 2 \quad \Rightarrow$$

$$x - 1 \le \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 1 < x-1 \le 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \le \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad 2 < x \le 3 \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é:

$$S =]1, \frac{3}{2}] \cup]2,3]$$

5.5. EXERCÍCIOS

5.1. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x^2-x-16} = 16$

b) $2^{3x+2} \div 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

c) $3.\ 2^x - 5.\ 2^{x+1} + 5.2^{x+3} - 2^{x+5} = 2$

d) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

e) $3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4.\ 3^{1-3x}$

f) $x^{x^2-2} = 1$ (em IR_+)

g) $x^{4-2x} = x$ (em IR_+)

h) $4^x + 2.\ 14^x = 3.\ 49^x$

(Sugestão: Multiplique por $\frac{1}{14^x}$)

5.2. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 4^{x} = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$ $x, y \in IR_+$

5.3. Resolva as seguintes inequações:

a) $2^{5x-1} > 8$ b) $4^{x^2+1} \leq 32^{1-x}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} . \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}$ d) $(0,3)^{x-5} \leq (0,09)^{2x+3} \leq (0,3)^{x+6}$

e) $4^{x+\frac{1}{2}} - 5\, 2^{x} + 2 > 0$ f) $x^{3x^2-7x+2} \leq 1$ (Em IR_+^*)

g) $a^{x^2} < a^9$ ($a > 0$ e $a \neq 1$) h) $|x|^{3x^2-4x-4} > 1$

5.4. Resolva as seguintes equações:

a) $\log_{2x} x = -2$ b) $\log_{x-3} 4x = 2$ c) $\log_{27}\log_2\log_2(x-1) = \frac{1}{3}$

5.5. Resolva as seguintes equações:

a) $\log_9(x-1) = \log_3(\sqrt{10x-4}) - \log_3(x+2)$ b) $x^{\log x} = \frac{x^4}{1000}$

c) $(\log x)^{\log x} = x^2$ d) $\log_a ax.\log_x ax = 4, \quad a > 0, a \neq 1$

e) $5^{x} + 5^{x+1} = 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$ f) $2^{3x+2} \, . \, 3^{2x-1} = 8$

5.6. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} xy = 16 \\ \log_2 x = 2 + \log_2 y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log\sqrt{x} - \log\sqrt{y} = \log 3 \\ 9y^3 - x^2 = 90y \end{cases}$

5.7. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_3(x^2 - 4x) < \log_{\sqrt{3}}(3\sqrt{5})$ b) $\log_{1/3}(x^2 - 13) \geq -1$

c) $\log(x+2) + \log(x+3) > \log 12$ d) $\log_{(x^2-8)} 11 < \log_{(x^2-8)} 21$

e) $\log_2(x-1) \leq 3 + 10.\log_{(x-1)} 2$ f) $x^{\log_3 x} > x^2$