4. AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

4.1. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vimos no capítulo anterior que dado $a \in \mathrm{R}_+^*$, *a potência* a^x *pode ser definida para qualquer número* $x \in \mathrm{R}$. Portanto, *fixando* $a \in \mathrm{R}_+^*$, podemos definir uma função que a cada $x \in \mathrm{R}$ associa $a^x \in \mathrm{R}_+^*$. Esta função será chamada de função exponencial de base a .

Definição

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. Chama-se *função exponencial de base a*, a função

$$f : R \to R_+^*$$
$$x \to a^x$$

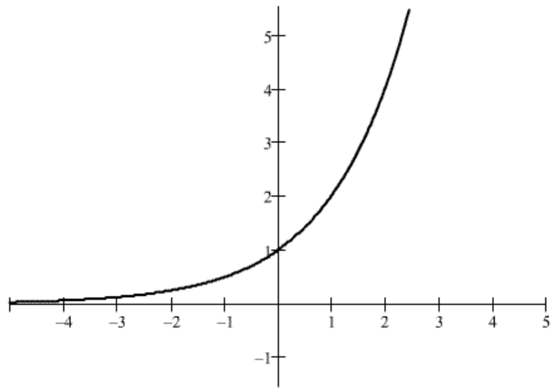
Observações

1) A exigência $a \neq 1$ é para que a função exponencial não seja uma função constante.

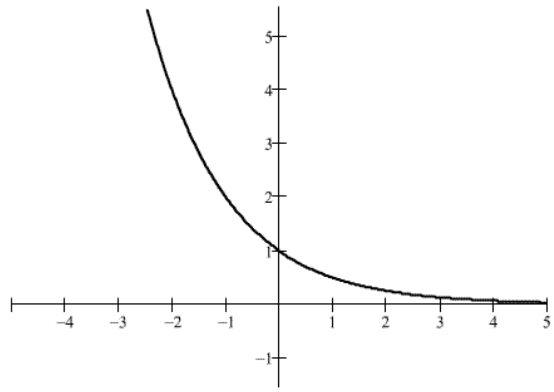
2) Segue da propriedade P_9), vista anteriormente para potências, que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{R}_+^*$, ou seja, f é sobrejetora.

3) Das propriedades P_6) e P_7), temos que a função exponencial é estritamente crescente para $a > 1$, e estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

Apresentamos a seguir o gráfico da função exponencial nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.



$a > 1$



$0 < a < 1$

Para o traçado desses gráficos, utilizamos os seguintes fatos:

1) Se $a > 1$, o gráfico de f aproxima-se do eixo Ox quando x decresce indefinidamente. Dizemos que o eixo Ox é uma assíntota horizontal do gráfico de f e usamos a notação

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Quando x cresce indefinidamente , a^x também cresce indefinidamente e então

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

2) Se $0 < a < 1$, o gráfico de f aproxima-se do eixo Ox quando x cresce indefinidamente. Dizemos que o eixo Ox é uma *assíntota horizontal* do gráfico de f e usamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Quando x decresce indefinidamente, a^x cresce indefinidamente e então

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty .$$

3) Em ambos os caso, o gráfico de f passa pelo ponto (0,1).

Proposição 4.1

Seja a $\in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$. A função $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ \quad x \mapsto a^x \end{array}$ é injetora

D] Isso é consequência do seguinte fato: toda função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetora.

De fato, suponhamos que f seja estritamente crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) .$$

Temos então,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ ou } f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) .$$

O caso em que f é estritamente decrescente demonstra-se de modo análogo.

Como a função exponencial é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$, concluímos que ela é injetora.

Sendo injetora e sobrejetora, temos que a função exponencial, como definida acima, é bijetora.

Proposição 4.2

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e x_1 e x_2 $\in \mathbb{R}$.

i) Se $a > 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 < x_2$.

ii) Se $0 < a < 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 > x_2$.

D]

i) Suponhamos, por absurdo, que $x_1 \geq x_2$. Como $a > 1$, a função exponencial é crescente, logo $a^{x_1} \geq a^{x_2}$, o que contradiz a hipótese.

ii) Análogo ao item i).

Da Proposição 4.2. e das observações feitas anteriormente sobre o crescimento e decrescimento da função exponencial, concluímos:

i) Para $a > 1$, $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

ii) Para $0 < a < 1$, $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

4.2. A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Trabalhamos anteriormente com a parte operacional dos logaritmos. Aprendemos que, fixado como base um número real a, positivo e diferente de 1 ($a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$), temos que para cada número real número real x positivo, o número $log_a x$ existe e é único. Estas condições de existência e unicidade nos dão a possibilidade de tratar os logaritmos, assim como fizemos com os expoentes, sob o ponto de vista da teoria das funções, pois a idéia básica na definição de função é que a cada elemento *x* de um conjunto A se faça corresponder um único elemento y de um conjunto B.

Definição

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. Chama-se *função logaritmica de base* a, a função

$$g: \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{R}$$
$$x \to log_a x$$

Proposição 4.3

Seja g: $R_+^* \to R$, $\quad a \in R_+^*$, com $a \neq 1$. Temos
$\quad x \to log_a x$

i) Se $a > 1$ então g é estritamente crescente.

ii) Se $0 < a < 1$ então g é estritamente decrescente .

D]

i) Sejam $a > 1$, $x_1, x_2 \in R_+^*$ e suponhamos que $x_1 < x_2$

Consideremos que

$$y_1 = log_a x_1 \Leftrightarrow a^{y_1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = log_a x_2 \Leftrightarrow a^{y_2} = x_2$$

De $x_1 < x_2$ temos que $a^{y_1} < a^{y_2}$. Como $a > 1$, como consequência da Proposição 4.2, segue-se que $y_1 < y_2$, ou seja, $log_a x_1 < log_a x_2$.

ii) A demonstração é análoga ao caso i)

Proposição 4.4

Seja g: $R_+^* \to R$, $\quad a \in R_+^*$, com $a \neq 1$. Se x_1 e $x_2 \in R_+^*$, então:
$\quad x \to log_a x$

i) Para $a > 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$.

ii) Para $0 < a < 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$.

D]

i) Consideremos que

$$y_1 = log_a x_1 \Leftrightarrow a^{y_1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = log_a x_2 \Leftrightarrow a^{y_2} = x_2.$$

Suponhamos que $log_a x_1 < log_a x_2$, isto é, $y_1 < y_2$. Como a função exponencial de base $a > 1$ é estritamente crescente, temos que $a^{y_1} < a^{y_2}$, ou seja, $x_1 < x_2$.

ii) A demonstração é análoga.

Das proposições anteriores temos as equivalências

i) Para $a > 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

ii) Para $0 < a < 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Proposição 4.5

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função $g\colon \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{R}$, $x \to log_a x$ é bijetora.

D]

A injetividade segue do fato da função ser estritamente crescente para $a > 1$ ou, estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

A função é sobrejetora pois, dado $y \in \mathrm{R}$, existe $x \in \mathrm{R}_+^*$, tal que $x = a^y$, o que é equivalente a $y = log_a x$.

Proposição 4.6

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. Consideremos as funções

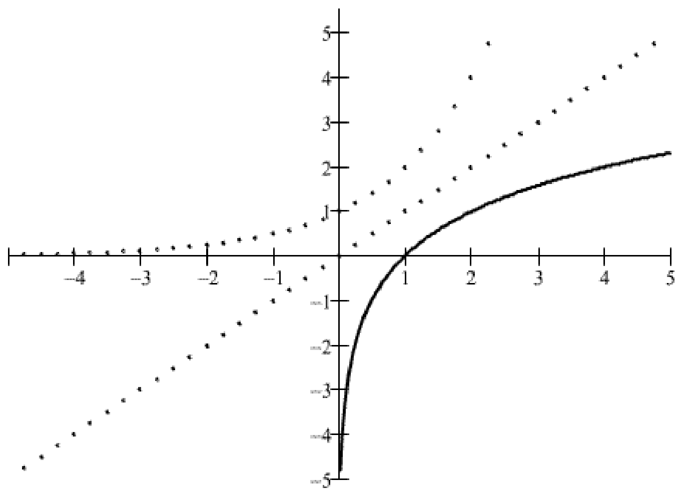
$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+^*,\ x \to a^x \qquad g\colon \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{R},\ x \to log_a x$$

Então $f \circ g\,(x) = x$, $\forall x \in \mathrm{R}_+^*$, $g \circ f\,(x) = x$, $\forall x \in \mathrm{R}$, ou seja, $f = g^{-1}$ e $g = f^{-1}$.

D] As funções f e g são bijetoras, logo admitem inversas. Além disso,

$$g(f(x)) = log_a a^x = x, \quad \forall x \in R \qquad e \qquad f(g(x) = a^{log_a x} = x, \quad \forall x \in R_+^*$$

O fato da função logarítmica ser a inversa da exponencial nos permite construir o seu gráfico usando a simetria em relação à 1ª bissetriz.



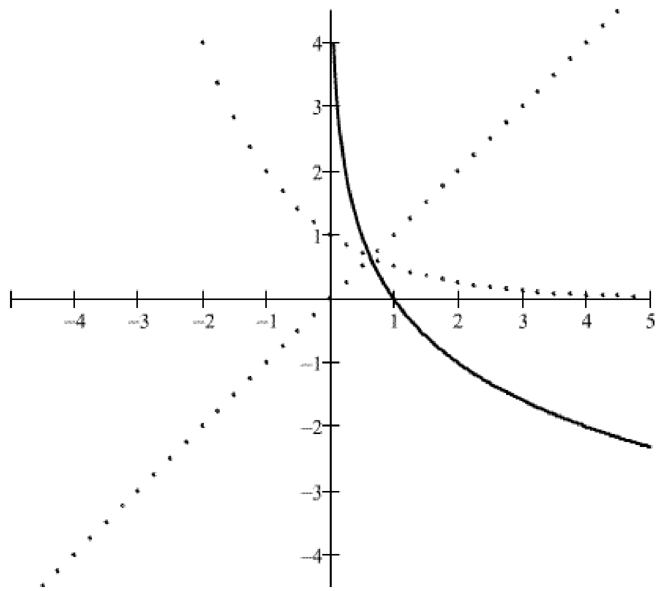
($a > 1$)

Observando o gráfico anterior concluímos:

1) O gráfico passa pelo ponto (1,0).

2) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3) O eixo Oy (x = 0) é assíntota do gráfico de g.



(0 < a < 1)

Neste caso temos:

1) O gráfico passa pelo ponto (1,0).

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

3) O eixo Oy (x = 0) é assíntota do gráfico de g.

Trabalharemos a seguir com exemplos de funções obtidas a partir de funções logarítmicas, aplicando-se operações com funções, tais como, composição, soma, multiplicação, etc.

Exemplos

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$

Solução:

Como o domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais positivos temos que

$x^2 - 1 > 0$. Assim, D(f) = $]-\infty, -1[\ \cup \ ]1, +\infty[$.

b) $f(x) = \log_{x-1}\left(2x - x^2\right)$

Solução:

Neste caso as seguintes condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

i) $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(2 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

ii) $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

iii) $x - 1 \neq \ \Leftrightarrow x \neq 2$

De i), ii) e iii), concluímos que D(f) = $]1,2[$.

c) $f(x) = \log_3\left(2^x - 4\right)$

Solução:

Temos que,

$$2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$$

Assim, D(f) = $]2, +\infty[$.

d) $f(x) = \log\left(2^x + 4\right)$

Solução:

Neste caso, como $2^x + 4 > 0, \ \forall x \ \in R$, temos que D(f) = R

2) Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando o domínio, a imagem e assíntota vertical.

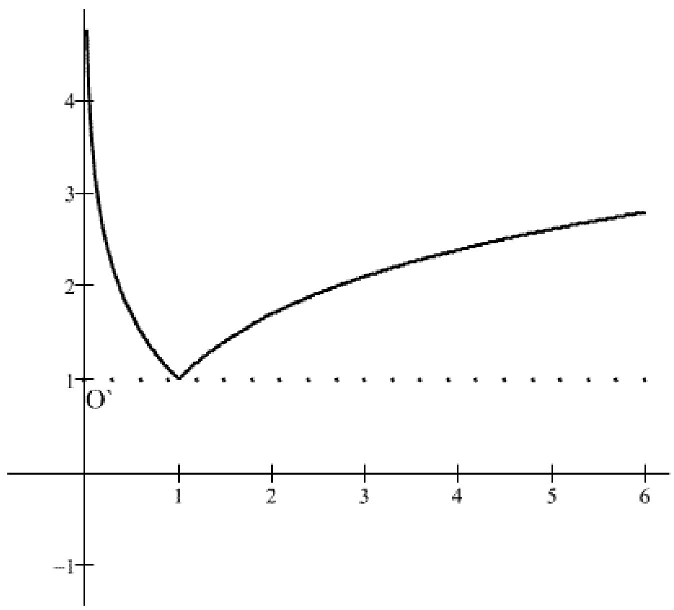
a) $f(x) = 1 + |\ln x|$

Solução:

Temos

$$y = 1 + |\ln x| \Leftrightarrow y - 1 = |\ln x|$$

Fazendo $y - 1 = y'$ e $x = x'$ transladamos os eixos coordenados para a nova origem O'(0,1) e construímos no novo sistema o gráfico de $y' = |\ln x'|$.



D(f) = $\mathbb{R}_+^*$, Im(f) = [1, +∞[.

A reta x = 0 é assíntota vertical.

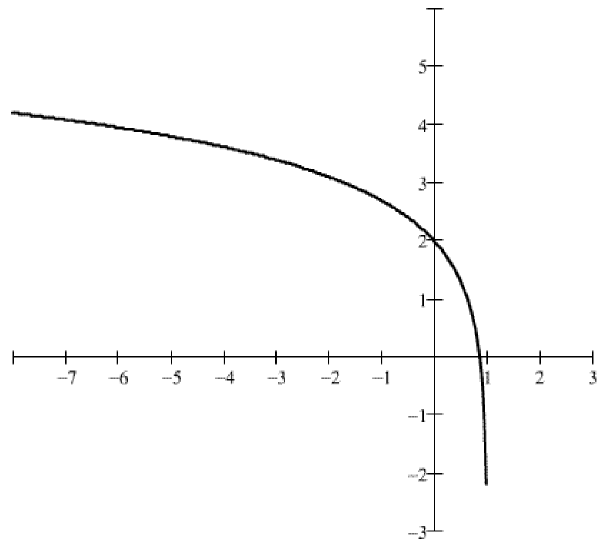
b) $f(x) = 2 + \ln(1 - x)$

Solução:

Temos que

$$y - 2 = \ln(1 - x) = \ln(-(x - 1))$$

Fazendo $y - 2 = y'$ e $x - 1 = x'$, transladamos os eixos coordenados para a nova origem, O'(1,2) e construímos no novo sistema o gráfico de $y' = \ln(-x')$



$D(f) =]-\infty, 1[$, $Im(f) = R$.

$x = 1$ é assíntota vertical.

c) $f^{-1}(x)$, sendo $f(x) = 1 + e^{x+2}$

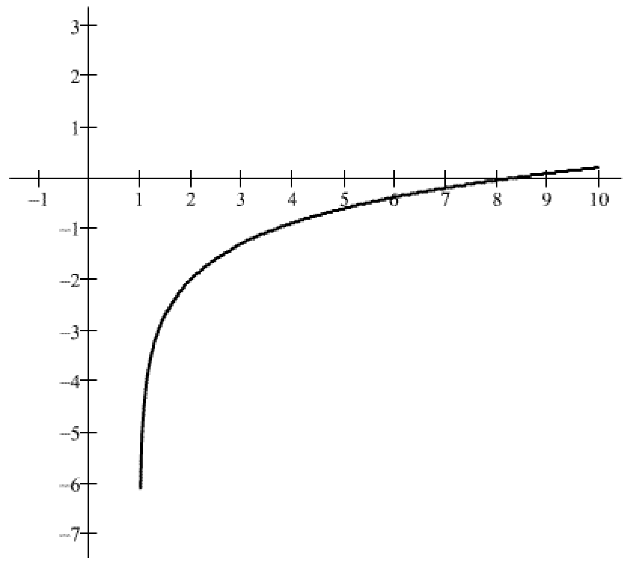
Solução:

Vamos determinar, inicialmente, $f^{-1}(x)$:

$$y = 1 + e^{x+2} \Leftrightarrow y - 1 = e^{x+2} \Leftrightarrow \ln(y-1) = x + 2 \Leftrightarrow x = \ln(y-1) - 2\,.$$

Temos assim que $f^{-1}(x) = \ln(x-1) - 2$.

Fazendo $y + 2 = y'$ e $x - 1 = x'$, construímos o gráfico da função $y' = \ln x'$ no novo sistema cuja origem é O'(1, −2).



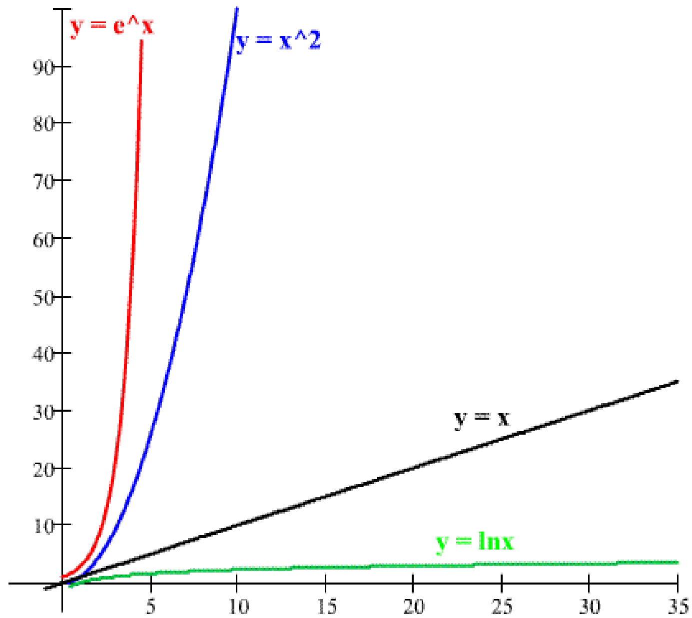
D(f) =]1, + ∞[, Im(f) = R

x = 1 é assíntota vertical

4.3. ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE O COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

O rápido crescimento da exponencial e a vagarosidade dos logaritmos

Uma propriedade importante da exponencial de base maior que 1 é o seu rápido crescimento com o crescer de x. Infelizmente, essa propriedade nem sempre é devidamente enfatizada no ensino do 2º grau, talvez porque o ensino do logaritmo continue sendo feito como se ele fosse apenas um instrumento de cálculo à moda antiga sem maiores preocupações com o aspecto funcional do logaritmo e da exponencial. A seguinte tabela ilustra este fato, onde comparamos o crescimento de x^2 com o de e^x ($e \cong 2{,}7$) com valores arredondados.



x	$y = x^2$	$y = e^x$
0	0	1 cm
3	9	20 cm
5	25	148 cm
10	100	220 cm
15	225	33 km
20	400	4.852 km
30,3357	920	Distância da Terra ao Sol
41,39	1.713	1 ano-luz
42,85	1.836	4,3 anos-luz
...	...	...

(Distância da Terra ao sol = 149.500.000)

(1 ano-luz = 946.728 x 10^7 km)

(4,3 anos-luz = 407.093 x 10^8 = distância da estrela mais próxima do Sol)

Estes poucos cálculos mostram claramente o quão rapidamente cresce a função exponencial com o crescer do seu argumento.

Em correspondência ao rápido crescimento da exponencial está o vagaroso crescimento da função logarítmica. Assim, se a 3ª coluna da tabela representar y temos que a nossa 1ª coluna representa o logaritmo na base *e* de y. Para conseguirmos subir 5cm na vertical das ordenadas é preciso fazer y = 148cm. Para subir 10cm é preciso andar 220m na horizontal.

4.4. EXERCÍCIOS

4.1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 3^{x+1}$; b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; c) $f(x) = -2^{-x}$; d) $f(x) = e^{-|x|}$

4.2. Mostre que a função $f(x) = \left(m^2 - 2m + 3\right)^x$ é crescente para qualquer $m \in R$.

4.3. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{-(2^{2x+1} - 5\,.2^x + 2)}$ b) $f(x) = \dfrac{\log_3(x+2)}{\log_5(3-x)}$

c) $f(x) = \log_{(3x-4)}(x^2 - 9)$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3^{-2x} - 8.3^{-x} + 15}}$

4.4. Determine a expressão que define a inversa de cada função abaixo, indicando o domínio e a imagem de f^{-1}.

a) $f(x) = 2 + \log_5 x$ b) $f(x) = 3^{2x+3}$

c) $f(x) = \log_x 10$ d) $f(x) = 5^x - 2.5^{-x}$ (Use o fato que $x < \sqrt{x^2+8}$, $\forall x \in R$)

4.5.Esboce o gráfico das funções definidas pelas seguintes sentenças:

a) $f(x) = 1 + \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2}(x-2)$

c) $f(x) = -|\log_2 x|$ d) $f(x) = \log_{1/2}|x|$

e) $f(x) = |\log_2|x||$ f) $f(x) = 1 + |\log_{1/2}(x-1)|$

4.6. Mostre que se $a,b \in R_+^*$ e $x \in R^*$ então $a^x = b^x \Rightarrow a = b$.Esta propriedade é válida em geral?