3. LOGARITMO. SISTEMA DE LOGARITMO

3.1. LOGARITMO

Agora que já "sabemos" o que é a^x, podemos formalizar a definição de logaritmo.

Definição

Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$. Chama-se *logaritmo de b na base a*, o expoente x que satisfaz a equação $a^x = b$.

$$\boldsymbol{\log_a b = x \iff a^x = b}$$

$\boldsymbol{x}$ é o *logaritmo*

$\boldsymbol{a}$ é a *base*

$\boldsymbol{b}$ é o *logaritmando*

As restrições impostas à base a e ao logaritmando b decorrem das seguintes

Observações

1) $a \in \mathrm{R}_+^*$, para que a^x tenha significado $\forall x \in \mathrm{R}$.

2) $a \neq 1$, pois, caso contrário, $\log_a b$ só teria significado para $b = 1$.

3) $b \in \mathrm{R}_+^*$ pois, como $a > 0$, temos que $a^x > 0$.

Proposição 3.1.

Se a, $b \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $a \neq 1$, existe um único número real x tal que $x = log_a b$.

D] Segue imediatamente da Propriedade P_9), considerando que

$$\boldsymbol{log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Exemplo

Calcule $\log_{0,25} 32$

Solução:

$$\log_{0,25} 32 = x \Leftrightarrow (0,25)^x = 32 \Leftrightarrow (0,25)^x = 2^5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^5 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow$$

$$-2x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \therefore log_{0,25} 32 = -\frac{5}{2}$$

Como consequências imediatas da definição de logaritmo temos que se a, b $c \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $a \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$\boxed{\textbf{1)}\ \boldsymbol{log_a 1 = 0}}$

D] $log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$\boxed{\textbf{2)}\ \boldsymbol{log_a a = 1}}$$

D] $log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$

$$\boxed{\textbf{3)}\ \boldsymbol{log_a a^{\alpha} = \alpha}}$$

D] $log_a a^{\alpha} = x \Leftrightarrow a^x = a^{\alpha} \Leftrightarrow x = \alpha$

$$\boxed{\textbf{4)}\ \boldsymbol{a^{log_a b} = b}}$$

D] $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

$$\boxed{\textbf{5)}\ \boldsymbol{log_a b = log_a c \Rightarrow b = c}}$$

D] $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (III)

$log_a c = x \Leftrightarrow a^x = c$ (IV)

De (III) e (IV) concluímos que $b = c$.

Sejam $a, b, c, \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e α e $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Temos as seguintes propriedades

$$\boxed{\boldsymbol{P_1)}\ \boldsymbol{log_a(bc) = log_a b + log_a c}}$$

D] Consideremos que

$$\log_a(bc) = x \Leftrightarrow a^x = bc$$

$$\log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \Leftrightarrow a^z = c$$

Então,

$$a^x = bc = a^y a^z = a^{y+z} \Rightarrow a^x = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z$$

$$\boxed{\boldsymbol{P_2)} \quad \boldsymbol{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}}$$

Consideremos,

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x \Leftrightarrow a^x = \frac{b}{c}'$$

$$\log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \Leftrightarrow a^z = c$$

Então,

$$a^x = \frac{b}{c} = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z} \Rightarrow a^x = a^{y-z} \Rightarrow x = y - z$$

Temos o seguinte caso particular:

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b}$$

D] $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b$

$\boxed{P_3) \quad \boldsymbol{log_a b^{\alpha} = \alpha\, log_a b}}$

D] Consideremos,

$$log_a b^{\alpha} = x \Leftrightarrow a^x = b^{\alpha} \quad \text{e}$$

$$log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

Então,

$$a^x = b^{\alpha} = \left(a^y\right)^{\alpha} = a^{y\alpha} \Rightarrow a^x = a^{y\alpha} \Rightarrow x = y\alpha .$$

Caso particular:

$$\boldsymbol{log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} log_a b}$$

D] $log_a \sqrt[n]{b} = log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} log_a b$

$\boxed{P_4) \quad \boldsymbol{log_{a^{\beta}} b = \frac{1}{\beta} log_a b}}$

D] Consideremos,

$$log_{a^{\beta}}(b) = x \Leftrightarrow \left(a^{\beta}\right)^x = b \Leftrightarrow a^{\beta x} = b \qquad \text{e}$$

$$log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

Então,

$$a^{\beta x} = b = a^y \Rightarrow \beta x = y \Rightarrow x = \frac{1}{\beta} y$$

Casos particulares:

i) $\boldsymbol{log_{a^{-1}}(b) = -\, log_a b}$

ii) $\boldsymbol{log_{\sqrt[n]{a}}\, b = n\, log_a\, b}$

D]

i) $log_{a^{-1}}(b) = -\dfrac{1}{1} log_a b = - log_a b$

ii) $log_{\sqrt[n]{a}}\, b = \ \ log_{a^{1/n}}(b) = \dfrac{1}{1/n} log_a b = n\, log_a \mathrm{b}$

Exemplo

Aplicando as propriedades de logaritmos, desenvolva $\log_3\left(\dfrac{a^2\sqrt{bc}}{\sqrt[5]{(a+b)^3}}\right)$, supondo que a, b e c são números reais positivos.

Solução:

$$\log_3\left(\frac{a^2\sqrt{bc}}{\sqrt[5]{(a+b)^3}}\right) = \log_3\left(a^2\sqrt{bc}\right) - \log_3\sqrt[5]{(a+b)^3} = \log_3 a^2 + \log_3\sqrt{bc} - \log_3(a+b)^{3/5} =$$

$$= 2\log_3 a + \frac{1}{2}\log_3(bc) - \frac{3}{5}\log_3(a+b) =$$

$$= 2\log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 b + \frac{1}{2}\log_3 c - \frac{3}{5}\log_3(a+b)$$

3.2. SISTEMAS DE LOGARITMOS DE BASE a. MUDANÇA DE BASE.

Chamamos de *sistema de logaritmos de base a*, o conjunto de todos os logaritmos na base a ($a > 0$ e $a \neq 1$).

Quando trabalhamos com logaritmos podemos utilizar qualquer base a, $a > 0$ e $a \neq 1$. Naturalmente não precisamos construir tabelas dos valores dos logaritmos para todos os sistemas. Conhecendo-se bem um sistema, podemos a partir da tabela obter o valor do logaritmo de um número em qualquer base. Para isto, precisamos de uma fórmula que relacione logaritmos de bases diferentes. A fórmula é a seguinte:

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$$

É válida se $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}_+^*$, $\boldsymbol{a \neq 1}$ e $\boldsymbol{c \neq 1}$.

De fato, considerando

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \text{e}$$

$$log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b$$

temos que $a^x = c^y$. Assim,

$$log_c\left(a^x\right) = log_c\left(c^y\right) \Rightarrow x\, log_c a = y\, log_c c = y$$

Como $a \neq 1$, segue-se que $log_c a \neq 0$ e, portanto,

$$x = \frac{y}{log_c a} \Rightarrow log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

A fórmula $log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a}$ nos diz que <u>logaritmos em diferentes bases diferem por uma constante</u>.

Consequências:

$$\boxed{\boldsymbol{log_a b . log_c a = log_c b}}$$

D] Segue imediatamente da propriedade dada acima.

$$\boxed{\boldsymbol{log_a b = \frac{1}{log_b a}}}$$

D] $log_a b = \dfrac{log_b b}{log_b a} = \dfrac{1}{log_b a}$

Exemplos

1) Se a, b e c são números reais positivos, $a \neq 1$ e $ac \neq 1$, então

$$\boldsymbol{log_a b = (log_{ac} b)(1 + log_a c)}$$

D] $(log_{ac} b)(1 + log_a c) = \dfrac{log_a b}{log_a ac}(1 + log_a c) = \dfrac{log_a b}{log_a a + log_a c}(1 + log_a c) =$

$$= \frac{log_a b}{1 + log_a c}(1 + log_a c) = log_a b$$

2) Se a, b e c são reais positivos com $c \neq 1$, então

$$\boldsymbol{a^{log_c b} = b^{log_c a}}.$$

D] Sejam $x = a^{log_c b}$ e $y = b^{log_c a}$. Vamos mostrar que $x = y$.

$$log_c x = log_c\left(a^{log_c b}\right) = log_c b . log_c a \qquad (\text{ V })$$

$$log_c y = log_c\left(b^{log_c a}\right) = log_c a . log_c b \qquad (\text{ VI })$$

De (V) e (VI), temos que $log_c x = log_c y$ e, portanto, $x = y$.

3) Se a, b, c e d são reais positivos diferentes de 1 e $abc \neq 1$, então

$$\boldsymbol{log_a d \cdot log_b d + log_b d \cdot log_c d + log_c d \cdot log_a d = \frac{log_a d \cdot log_b d \cdot log_c d}{log_{abc} d}}$$

D] Partindo do 2º membro da expressão, chegaremos ao 1º membro. Vejamos:

$$\begin{aligned}\frac{log_a d.log_b d.log_c d}{log_{abc} d} &= log_a d.log_b d.log_c d\ log_d abc = \\ &= log_a d.log_b d.log_c d\left(log_d a + log_d b + log_d c\right) = \\ &= log_b d.log_c d + log_a d.log_c d + log_a d.log_b d.\end{aligned}$$

Dentre a infinidade de valores que pode assumir a base, e portanto dentre a infinidade de sistemas de logaritmos, dois se destacam por suas aplicações práticas: o sistema de logaritmos decimais e o sistema de logaritmos neperianos.

O SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMAIS

A preferência pelos logaritmos decimais nos cálculos se deve, evidentemente de usarmos um sistema de numeração de base 10. Os logaritmos decimais também são chamados de logaritmos de Briggs, por ter sido o inglês Henry Briggs (1561-1631) quem primeiro utilizou o número 10 para a construção de tábuas de logaritmos. Briggs publicou sua primeira tábua em 1617; depois em versão bem mais ampliada, em 1624 (Arithmetica Logarithmica) que continha o logaritmo dos primeiros 20.000 inteiros e dos números entre 90.000 e 100.000 calculados com 14 casas decimais! O espaço deixado por Briggs entre 20.000 e 90.000 foi preenchido por Adrian Vlacq, um matemático holandês que publicou uma tábua dos logaritmos dos primeiros 100.000 números inteiros, ainda em 1624.

Embora os logaritmos decimais tenham perdido sua importância como instrumento de cálculo manual, eles ainda estão presentes em várias situações práticas. Vejamos exemplos em algumas áreas.

Química - O fator pH é um índice muito usado pelos químicos para medir a concentração de íons positivos numa solução.

Soluções	Concentração iônica
ácidas	10^{-2} a 10^{-7} moles por litro
básicas	10^{-7} a 10^{-12} moles por litro
neutra	10^{-7} moles por litro

Como esses números são muito pequenos, ou equivalentemente, têm denominadores muito grandes, seus logaritmos são mais adequados para caracterizar as concentrações. Isto é consequência do vagaroso crescimento dos logaritmos. Uma vez que os logaritmos são negativos (já que os números são menores que 1) prefere-se definir o pH como o oposto do logaritmo da concentração. Temos assim:

Soluções	pH
ácidas	< 7
neutra	7
básica	>7

Sismologia - Em sismologia, a medida da intensidade das ondas que emanam de um centro sísmico se faz com uma escala logarítmica decimal, chamada de "escala Richter". Como no caso do pH em Química, também aqui ocorrem números muito grandes nas medidas da energia liberada nos terremotos, sendo, pois preferível trabalhar com o logaritmo para construir a escala de medição da intensidade dos abalos.

Acústica - Também em Acústica os logaritmos decimais são usados na construção da escala decibel, que serve para medir a intensidade dos sons. As escalas são construídas com logaritmos decimais (poderia ser outra base) para que os números da escala não fiquem muito grandes.

É comum se utilizar a notação log b em lugar de $\log_{10} b$. Por terem sido bastante utilizados no passado, e ainda aparecerem em várias áreas do conhecimento, usa-se a notação abaixo para os logaritmos decimais:

Notação tradicional para os logaritmos decimais:

$$\log_{10} b = \log b$$

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS

Trata-se de um sistema de logaritmos na base $e = 2,718283...$ Este número é um número irracional. O nome neperiano vem de John Napier, matemático escocês, considerado o criador dos logaritmos. Este sistema é também chamado de *sistema de logaritmos naturais*, pois no estudo dos fenômenos da natureza geralmente aparece uma lei exponencial de base e. Em geral usa-se a seguinte notação:

Notação tradicional para os logaritmos neperianos:
$\boldsymbol{\log_e b = \ln b}$

No Capítulo 6 faremos um estudo mais detalhado sobre o número e e os logaritmos neperianos.

3.3. EXERCÍCIOS

3.1. Calcule:

a) $\log_{100}\sqrt[3]{10}$ b) $5^{(2-\log_5 2)}$ c) $4^{\log_2 3+\log_{16} 3}$ d) $\log_{\sqrt[4]{3}}\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)$

3.2. Determine E nos seguintes casos:

a) $\log_3 E = 2 + \log_3 5 - \log_9 a - \log_{27} b$

b) $\log E = \dfrac{2\log(a-b) - 2\log(a+b) + 4\log b}{5}$

3.3. Sendo $\log 432 = p$ e $\log 648 = q$, calcule $\log 6$.

3.4. Sendo $\log(a - b) = m$ e $\log(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = n$, calcule $\log(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

3.5. Sendo $\log_a m = 2$, $\log_b m = 3$ e $\log_c m = 5$, calcule $\log_{abc} m$.

3.6. Para cada inteiro n, $n > 1$, mostre que: $-\log_n\left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right] = 3$

3.7. Mostre que se três números positivos estão em P.G. então seus logaritmos, numa base a, estão na ordem correspondente, em uma P.A. Se q é a razão da P.G. e r a razão da P.A., qual a relação entre q e r?

3.8. As raízes da equação $ax^2 - acx + b = 0$ são $x_1 = a\log_c a$ e $x_2 = b\log_c b$. Mostre que $a^a.b^b = c^c$

3.9. As raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ são $\log(a)$ e $\log(b)$. As raízes da equação $x^2 - 2Sx + P = 0$ são $\log(ab)$ e $\log(a/b)$. Calcule p e P em função de s e S.

3.10. Se $\log_a b = \log_b c$ e $\log_a c = \log_c x$, $x \neq 1$, mostre que $(\log_x b)^4 = (\log_x a)^3$
(Sugestão: Escreva as igualdades na base *x*)

3.11. Dada a equação $x^2 - px + B^m$ com raízes reais a e b, prove que:

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$$

3.12. Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa a, tais que $a - b \neq 1$ e $a + b \neq 1$. Mostre que

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2\log_{a+b} c\ .\ \log_{a-b} c$$