2. POTÊNCIAS E RAÍZES

2.1. POTÊNCIAS COM EXPOENTES INTEIROS

Vimos anteriormente alguns aspectos históricos das potências e dos logaritmos, bem como alguns processos que levaram à construção dos mesmos. Passaremos a seguir a um desenvolvimento mais formal da teoria das potências com o objetivo de termos condições de dar uma noção intuitiva do significado de uma potência de expoente irracional.

Sejam $a \in \mathrm{R}_+^*$, e $\mathrm{n} \in \mathrm{N}^*$. A *potência* a^{n} é definida como o produto de n fatores iguais ao número a, ou seja,

$$a^{\mathrm{n}} = \underbrace{a.a.a.a. \ldots .a}_{\text{n fatores}}$$

O número a é chamado de ***base*** e n ***expoente*** da potência a^{n}.

Propriedades

Sejam m, n $\in$ ***N*, a, b*** $\in$ ***R₊*.***

A₁) $a^m.a^n = a^{m+n}$ **(Propriedade Fundamental)**

A₂) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **se** $m > n$

A₃) $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

A₄) $(a.b)^n = a^n.b^n$

A₅) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Intuitivamente, é fácil observar que:

$$a^n . a^m = \underbrace{(a.a. \ldots a)}_{n\ fatores}\underbrace{(a.a \ \ldots a)}_{m\ \ fatores} = \underbrace{a.a.\ldots a}_{n+m\ fatores} = a^{n+m}$$

Uma demonstração rigorosa da Propriedade Fundamental e das demais propriedades é feita utilizando o processo da indução.

O objetivo agora é estender a definição para potência com expoentes inteiros. Para tal é preciso definir a^0 e a^{-n}, onde $n \in N$.

Faremos isso de modo que a Propriedade Fundamental seja preservada, isto é, que

$$a^0 . a^n = a^{0+n} = a^n \qquad \text{(I)}$$

$$a^{-n} . a^n = a^{-n+n} = a^0 \qquad \text{(II)}$$

De (I) observamos que é conveniente definir:

$$a^0 = 1$$

De modo semelhante, admitindo que $\boldsymbol{a^0 = 1}$ em (II), chegamos á conclusão que a^{-n} deve ser igual a $\frac{1}{a^n}$.

Resumindo temos a seguinte

Definição

Sejam, $a \in R_+^*$ e $n \in N^*$. Definimos: $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a.a^{n-1} \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \end{cases}$

Observações

1) Se $n < 0$, $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

2) Se $a < 0$ e $n \in Z$, fazem sentido as definições de a^n, a^0 e de a^{-n}.

Por exemplo, $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3)(-3)}$$

$$(-3)^0 = 1$$

É fácil verificar que se $a < 0$ temos $a^n > 0$, se n é par e $a^n < 0$ se n é ímpar. Entretanto, como veremos posteriormente, para a teoria das funções exponenciais e logarítmicas definições de potências com base negativa não são convenientes, já que não podem ser estendidas de modo geral a expoentes fracionários.

3) Não faz sentido a expressão $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ para $a = 0$.

4) Não definimos 0^0. Devemos observar que não é conveniente definir 0^0 como sendo igual a 1; pois, se pensamos por um lado, que estamos estendendo para $a = 0$ a expressão $a^0 = 1$, $a \in R_+^*$, por outro lado, não estamos estendendo a expressão $0^n = 0.0.0...0$, $n \in N^*$ para n = 0. A inconveniência de definir 0^0 como sendo 1 pode ser vista com mais precisão no estudo de limite de funções no Cálculo Diferencial onde se mostra que 0^0 é uma "*indeterminação*"

As propriedades $A_1, A_2, ..., A_5$, vistas anteriormente são válidas também para números inteiros. Temos, portanto,

Propriedades

> ***Sejam a, b*** $\in R_+^*$. ***Para quaisquer m, n*** $\in Z$, ***tem-se:***
>
> **B$_1$)** $a^m . a^n = a^{m+n}$ **(Propriedade Fundamental)**
>
> **B$_2$)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
>
> **B$_3$)** $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$
>
> **B$_4$)** $(a.b)^n = a^n . b^n$
>
> **B$_5$)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Considerando as propriedades A_i dadas anteriormente para números naturais não nulos, apresentaremos as demonstrações de B_i.

B_1) $a^m . a^n = a^{m+n}$, $a \in R_+^*$, $\forall$ ***m, n*** $\in$ **Z.**

D]

Vamos analisar os seguintes casos:

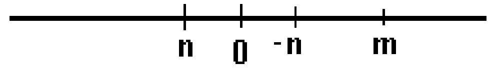
i) $m > 0$ e $n > 0$ (este caso recai em A_1)

ii) $m < 0$ e $n < 0$

Temos que $-m > 0$ e $-n > 0$. Assim, utilizando a definição e a propriedade A_1, temos:

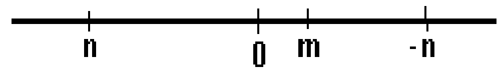
$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

iii) $m > 0$ e $n < 0$ (portanto $-n > 0$)



Se $m > -n$ temos por A_2 que $a^m a^n = a^m \dfrac{1}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$

Se $m = -n$,



Se $m < -n$, $a^m a^n = \dfrac{a^m}{a^{-n}} = \dfrac{1}{\dfrac{a^{-n}}{a^m}} = \dfrac{1}{a^{-n-m}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$

iv) $m = 0$ ou $n = 0$

$$\boldsymbol{a^0 a^m = 1.a^m = a = a^{m+0}}$$

B2) $\dfrac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{a^n}} = \boldsymbol{a^{m-n}}$, $\boldsymbol{a \in R_+^*}$, $\boldsymbol{m, n \in Z}$,

D]

$$\frac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{a^n}} = \boldsymbol{a^m . \frac{1}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n}}$$

B3) $\boldsymbol{\left(a^m\right)^n = a^{m.n}}$, $\boldsymbol{a \in R_+^*}$, $\boldsymbol{m, n \in Z}$

D] Vamos analisar os seguintes casos:

i) $m > 0$ e $n > 0$ (este caso recai em A_3)

ii) $m < 0$ e $n < 0$

Temos que $-m > 0$ e $-n > 0$. Assim,

$$\boldsymbol{\left(a^m\right)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-m}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{m.n}} = \left(\frac{1}{\dfrac{1}{a}}\right)^{m.n} = a^{m.n}}$$

iii) $m > 0$ e $n < 0$

$$\boldsymbol{\left(a^m\right)^n = \frac{1}{\left(a^m\right)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}}$$

iv) $m < 0$ e $n > 0$

Temos que $-m > 0$ e $n > 0$. Vamos portanto aplicar A_5 e A_3 para $-m$ e n. $\left(a^m\right)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(a^{-m}\right)^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$

v) $m = 0$ ou $n = 0$

$$\left(a^0\right)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0.n}$$

Análogo para $n = 0$

B4) $(a.b)^n = a^n.b^n$, $a, b \in R_+^*$, $n \in Z$

D]

i) $n > 0$ (recai em A_4)

ii) $n < 0$

Neste caso $-n > 0$. Podemos aplicar A_4 para $-n$:

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}.b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}\frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n$$

iii) $n = 0$

$$(ab)^0 = 1 = a^0 b^0$$

B5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $a, b \in R_+^*$, $n \in Z$

D]

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a\frac{1}{b}\right)^n = (a)^n\left(\frac{1}{b}\right)^n = (a)^n\left(b^{-1}\right)^n = a^n b^{-n} = a^n \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}$$

2.2. RAÍZES E POTÊNCIAS COM EXPOENTES FRACIONÁRIOS

Nosso objetivo agora é definir a potência $a^{\frac{p}{q}}$, p, q $\in$ Z, q $\neq$ 0. Para isto é necessário introduzir a definição e alguns resultados referentes à raiz n-ésima de um número.

Definição

> Sejam $a > 0$ e $n \in N^*$. Chama-se *raiz n-ésima* de *a,* o número real positivo b tal que $b^n = a$.
>
> Notação: $b = \sqrt[n]{a}$

Observações

1) Pela definição, $\sqrt[1]{a} = a$.

2) Por convenção $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

3) Se $a < 0$ pode-se definir $\sqrt[n]{a}$, no caso em que n é ímpar: $\sqrt[n]{a}$ é o número real b tal que $\mathrm{b}^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}$. Neste caso, b < 0. Por exemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$. É claro, trabalhando com os números reais, que a definição de $\sqrt[n]{a}$ não faz sentido se n é par e $a < 0$, pois não existe um número real b tal que $\mathrm{b}^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}$, $\mathrm{a} < 0$ e $\mathrm{b}^{\mathrm{n}} > 0$. Assim, $\sqrt{-4}$ não faz sentido em R.

4) Se $a = 0$, definimos $\sqrt[n]{0} = 0$ e a definição anterior pode ser estendida da seguinte forma: Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $b^{\mathrm{n}} = a$ então $\sqrt[\mathrm{n}]{a} = b$.

Propriedades

> ***Sejam a, b*** $\in$ ***R₊, m, n, p*** $\in$ ***N****

R$_1$) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
R$_2$) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, **se** $b \neq 0$.
R$_3$) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
R$_4$) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
R$_5$) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p.n]{a^{p.m}}$

R$_1$) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$, $a, b \in R_+$, $m \in N^*$

D] Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Então $x^n = a$ e $y^n = b$. Daí

$$a.b = x^n y^n = (x.y)^n$$

Como $x.y \geq 0$, então $x.y = \sqrt[n]{ab}$, ou seja, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = x.y = \sqrt[n]{ab}$.

R$_2$) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $a, b \in R_+$, $b \neq 0$, $n \in N^*$

D] Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Então $x^n = a$ e $y^n = b$. Daí

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

Como $\dfrac{x}{y} \geq 0$, $\dfrac{x}{y} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$. Portanto, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

R$_3$) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in R_+$, $n, m \in N^*$

D] Seja $x = \sqrt[n]{a}$. Então $x^n = a$ e $x^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Temos

$$a^m = \left(x^n\right)^m = x^{nm} = \left(x^m\right)^n \Rightarrow x^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

R_4) $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}}$, $\boldsymbol{a \in R_+}$, $\boldsymbol{n, m \in N^*}$

D] Sendo $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[m]{x}$, temos $x^n = a$ e $y^m = x$

$$\boldsymbol{y^m = x \Rightarrow \left(y^m\right)^n = x^n \Rightarrow y^{mn} = x^n \Rightarrow y = \sqrt[mn]{x^n}} \ ,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = y = \sqrt[mn]{x^n} = \sqrt[mn]{a}}$$

R_5) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p.n]{a^{p.m}}}$, $\boldsymbol{a \in R_+}$, $\boldsymbol{n, m, p \in N^*}$

D]

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = x \Rightarrow x^n = a^m \Rightarrow \left(x^n\right)^p = \left(a^m\right)^p \Rightarrow x^{np} = a^{mp} \Rightarrow x = \sqrt[pn]{a^{pm}}}$$

A definição da raiz n-ésima de um número real positivo nos permite estender a noção de potência de um número real positivo de modo a incluir expoentes fracionários da forma m/n, $m, n \in Z$, $n > 0$. Queremos dar esta definição de modo a conservar as propriedades anteriores de potências. Por exemplo, análogo à propriedade B_3 desejamos que:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = a^{\left(\frac{m}{n}\right).n} = a^{m}$$

Assim sendo devemos ter: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Definição

Dado o número real positivo a e o número racional $\frac{m}{n}$, $m, n \in Z$, $n > 0$, então definimos

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Observações

1) Em particular, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

2) Se $a = 0$ e $\frac{m}{n} > 0$, podemos considerar $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0$.

3) Se $a < 0$ e n é ímpar então a expressão $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ também está definida.

Propriedades

Sejam $a, b \in R_+^*$, $m, n, p, q \in Z$, $n > 0$, $q > 0$.

$C_1)$ $a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

$C_2)$ $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, ***sendo $a \neq 0$***

$C_3)$ $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}.\frac{p}{q}}$

$C_4)$ $(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}$

$C_5)$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{m}}}$, ***sendo $b \neq 0$***

Como caso particular de C_2 temos $\dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{-\frac{p}{q}}$.

C_1) $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$, $\boldsymbol{a \in R_+^*,\ m, n, p, q \in Z,\ n > 0, q > 0}$

D]

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qn]{a^{qm}}\ \sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[qn]{a^{qm}a^{pn}} = \sqrt[qn]{a^{qm+pn}} =}$$

$$\boldsymbol{= a^{\frac{qm+pn}{qn}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$$

C_2) $\boldsymbol{\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}}$, $\boldsymbol{a \in R_+^*,\ m, n, p, q \in Z,\ n > 0, q > 0}$

D] A demonstração é semelhante à anterior, utilizando R_2), R_5) e B_2).

C_3) $\boldsymbol{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}.\frac{p}{q}}}$, $\boldsymbol{a \in R_+^*,\ m, n, p, q \in Z,\ n > 0, q > 0}$

D]

$$\boldsymbol{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{p}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{p}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{\left(a^m\right)^{p}}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} =}$$

$$\boldsymbol{= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\frac{p}{q}}}$$

C_4) $\boldsymbol{(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}}}$, $\boldsymbol{a, b \in R_+^*,\ m, n \in Z,\ n > 0}$

D]

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

C5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, $\;\boldsymbol{a, b \in R_+^*, m, n \in Z, n > 0}$

D] A demonstração é semelhante à anterior, utilizando B_5) e R_2).

Provaremos a seguir alguns resultados que serão necessários para se estender a definição de potências com expoente real.

Proposição 2.1

Sejam $a \in \mathrm{R}_+^* - \{1\}$, $m, n \in \mathrm{N}$.

i) Se $0 < a < 1$ e $n < m$ então $a^n > a^m$.

ii) Se $a > 1$ e $n < m$ então $a^n < a^m$.

D]

i) $a < 1$ e $a > 0 \Rightarrow a.a < a \Rightarrow a^2 < a \Rightarrow a.a^2 < a.a \Rightarrow a^3 < a^2$.

Continuando com este processo obtemos

$$a^m < a^{m-1}$$

e usando a transitividade temos

$$a^m < a^{m-1} < a^{m-2} < a^{m-3} < \ldots < a < 1$$

Se $m > n$, $m = n + k.$, $k \in N^*$.

Assim, $$a^m = a^{n+k} < a^{(n+k)-1} < a^{(n+k)-2} < \ldots < a^{(n+k)-k} = a^n$$

ii) Análogo ao item anterior

Proposição 2.2

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $m,\ n \in \mathbb{Z}$.

i) Se $0 < a < 1$ e $n < m$ então $a^n > a^m$.

ii) Se $a > 1$ e $n < m$ então $a^n < a^m$.

D]

ii) Existem três casos a considerar.

1. Se $n > 0$ e $m > 0$ recaímos na Proposição 2.1.

2. Se $n < 0$ e $m < 0$ então $-n > 0$ e $-m > 0$. Como $n < m$ então $-m < -n$. Segue da Proposição 2.1 que

$$a^{-m} < a^{-n} \Rightarrow \frac{1}{a^m} < \frac{1}{a^n} \Rightarrow \frac{1}{a^m} - \frac{1}{a^n} < 0 \Rightarrow \frac{a^n - a^m}{a^n a^m} < 0 .$$

Sendo $a^m > 0$ e $a^n > 0$, podemos concluir que $a^n < a^m$.

3. Se $n < 0$ e $m > 0$ (análogo para o caso $n > 0$ e $m < 0$), temos que é crescente a sequência de potências com expoente negativos (item 2), isto é,

$$\ldots a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < 1$$

e também a sequência de potências com expoentes positivos (Proposição 2.1), ou seja,

$$1 < a < a^2 < a^3 < \ldots$$

logo,

$$a^n < \ldots < a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < 1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^m ,$$

portanto,

$$a^n < a^m .$$

i) Análogo ao item ii)

Proposição 2.3

Se $n \in N^*$ e $0 < a < b$ então $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

D]

Da definição de raiz n-ésima e lembrando que a >0 e b > 0, temos

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a \qquad e \quad \sqrt[n]{b} = y \Leftrightarrow y^n = b$$

Por hipótese, $b - a > 0$; logo, $y^n - x^n > 0$. Daí,

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}) > 0$$

e como a expressão do segundo parêntesis da desigualdade acima é positiva, temos que

$y - x > 0$, ou equivalentemente, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Proposição 2.4

Sejam $a \in R_+^* - \{1\}$, $p, q \in Q$, *onde* $p = \frac{r}{s}$, $q = \frac{m}{n}$, $r, s, m, n \in Z$, $n > 0$, $s > 0$

i) Se $p < q$ *e* $a > 1$ então $a^p < a^q$.

ii) Se $p < q$ *e* $0 < a < 1$ *então* $a^p > a^q$.

D]

i) Sendo k = m.m.c { n, s }, existem r', s'∈ Z tais que

$$p = \frac{r'}{k} \; e \; q = \frac{m'}{k}$$

$$p < q \Rightarrow \frac{r'}{k} < \frac{m'}{k} \Rightarrow r' < m' \Rightarrow a^{r'} < a^{m'} \Rightarrow \sqrt[k]{a^{r'}} < \sqrt[k]{a^{m'}} \Rightarrow$$

$$a^{\frac{r'}{k}} < a^{\frac{m'}{k}} \Rightarrow a^p < a^q$$

ii) Análogo ao item i)

2.3. POTÊNCIAS COM EXPOENTES IRRACIONAIS

De posse da definição e das propriedades das potências com expoente racional de um número real $a > 0$, nosso objetivo agora e estender a definição de a^x para $x \in$ R, ou seja, estabelecer o significado de a^x quando $x \in$ R - Q.

Como definir, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ **?**

Sendo $\sqrt{2}$ um número irracional, $2^{\sqrt{2}}$ não tem significado se considerarmos apenas as definições vistas até aqui. O desenvolvimento sistemático da teoria das potências com expoente irracional é um processo que envolve resultados avançados para os nossos propósitos. Entretanto, é possível estender de maneira intuitiva o significado dessas potências. Por exemplo, tomando-se a sequência de valores racionais

$$(1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421; ...) \qquad (I)$$

que se aproxima do irracional $\sqrt{2}$, construímos a sequência

$$\left(2^{1,4};\ 2^{1,41};\ 2^{1,414};\ 2^{1,4142};\ 2^{1,41421};\ \ldots \right) \qquad (I I)$$

que se aproxima de um número real que definimos como $2^{\sqrt{2}}$.

Tanto mais próximo o número r estiver de $\sqrt{2}$, mais próximo 2^{r} estará de $2^{\sqrt{2}}$.

Observemos que a sequência (I) é crescente e formada por valores maiores que $\sqrt{2}$.

Poderíamos também nos aproximar de $\sqrt{2}$ pela sequência

$$(1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ ...) \qquad (III)$$

que é decrescente e formada por valores maiores que $\sqrt{2}$, obtendo assim a sequência

$$\left(2^{1,5};\ 2^{1,42};\ 2^{1,415};\ 2^{1,4143},\ \ldots \right) \qquad (IV)$$

que se aproxima do mesmo número real chamado de $2^{\sqrt{2}}$.

O procedimento descrito acima pode ser utilizado para definir a^x, onde $a \in \mathrm{R}_+^* - \{1\}$ e $x \in \mathrm{R} - \mathrm{Q}$.

Para isso, suponhamos, por exemplo, $a > 1$, $x \in \mathrm{R} - \mathrm{Q}$ e consideremos duas sequências de números racionais: uma crescente formada por números menores que x:

$$\left(\mathrm{r}_1,\ \mathrm{r}_2,\ \mathrm{r}_3,\ \ldots,\ \mathrm{r}_n, \ldots \right)$$

e outra decrescente formada por números maiores que *x:*

$$\left(\mathrm{s}_1,\ \mathrm{s}_2,\ \mathrm{s}_3,\ \mathrm{s}_4,\ \ldots,\ \mathrm{s}_n, \ldots \right)$$

ambas se aproximando de x:

r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6..... x.... s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1

Pode-se provar que as duas sequências

$$\left(a^{r_1},\ a^{r_2},\ a^{r_3},\ a^{r_4},\ \ldots \right)$$

e

$$\left(a^{s_1},\ a^{s_2},\ a^{s_3},\ a^{s_4},\ \ldots \right)$$

tendem a um único número real que definimos por a^x

Usando o mesmo procedimento definimos a^x para $0 < a < 1$.

Observações

1) Se x é um número irracional positivo então definimos $0^x = 0$.

2) Se x é um número irraconal definimos $1^x = 1$.

3) Se $a < 0$ e x é um número irracional ($x \in \mathrm{R} - \mathrm{Q}$), a potência a^x não está definida.

Todos os resultados vistos para potências com expoentes racionais são estendidos para potências com expoentes irracionais. Assumiremos válidos os seguintes resultados:

Propriedades

Sejam $a, b \in R_+^*$, $x, y \in \mathrm{R}$.

P$_1$) $a^x . a^y = a^{x+y}$

P$_2$) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P$_3$) $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$

P$_4$) $\left(a.b\right)^x = a^x b^x$

P$_5$) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

P$_6$) $x < y$ e $a > 1 \Rightarrow a^x < a^y$

P$_7$) $x < y$ e $0 < a < 1 \Rightarrow a^x > a^y$

P$_8$) $a \in R_+^*$, $a \neq 1$: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

P$_9$) $a \in R_+^*$, $a \neq 1$ e $y>0$: $\exists!\ t \in R\ /\ a^t = y$

2.4. EXERCÍCIOS

2.1. Calcule:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}}.\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}$

b) $(0{,}25)^{\frac{1}{4}}.(0{,}125)^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{32}$

c) $\sqrt[n]{\dfrac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$

2.2 Supostas definidas, simplifique as seguintes expressões:

a) $x^3.x^{-1/2}.\dfrac{x^{3/2}}{x^2.x^{-3}}$

b) $(1+a^{1/3}).(1-a^{1/3}+a^{2/3})$

c) $(b^4-2b^2+1).\dfrac{b^{-2}}{b^2-b^{-2}}-1$

d) $\dfrac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+1}+3^{n-1}}$

e) $\dfrac{2^{2n+1}-4^n}{2^{2n}}$

f) $\left(\dfrac{1}{1-x^{-0,5}}-\dfrac{1}{1-x^{-1}}\right).(x-1)$

g) $\left(\dfrac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}-1}+\dfrac{a^{1/2}-1}{a^{1/2}+1}-\dfrac{4}{a-1}\right)^{-3}$

h) $\dfrac{x^{1/2}+1}{x+x^{1/2}+1}\div\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$

2.3. Se $x^{1/2}+x^{-1/2}=3$, calcule:

a) $x+x^{-1}$

b) x^2+x^{-2}

2.4. Resolva as seguintes equações:

a) $\sqrt[3]{x+4}=2$

b) $\sqrt{x+2} = x$

c) $\sqrt[4]{x^2 + 4x + 3} = \sqrt[4]{x+1}$

d) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x+1}$