1. UMA RAZÃO PARA OS LOGARITMOS

1.1. INTRODUÇÃO

Os logaritmos foram inventados, no começo do século XVII, como um instrumento para facilitar e simplificar o cálculo aritmético, permitindo que se efetuassem, com maior rapidez, operações complicadas, para a época, como o produto de números muito grandes ou uma potenciação com expoente fracionário. Isto foi possível, como veremos brevemente, devido a propriedade dos logaritmos de transformarem produto em somas, quociente em diferenças, potências em produtos, etc. Sua utilidade desde aquela época até bem recentemente, foi incontestável e os serviços que prestaram foram reconhecidos e elogiados por todos.

Do ponto de vista do ensino da Matemática, entretanto, a importância do ensino dos logaritmos, até por volta de 1960, devia-se à sua utilização como instrumento de cálculo. Ultimamente, todavia, com o advento dos computadores e das calculadoras de bolso, os logaritmos perderam essa importância. A perda de importância dos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético teve um reflexo crucial: tornou-se obsoleto o interesse especial que tinham os logaritmos decimais. O manuseio das tábuas logarítmicas, o uso de termos como característica, mantissa, antilogaritmo, tiveram seus dias de glória e tudo isto hoje está sendo guardado nas estantes da História.

Por que então continuamos a estudar logaritmos? Agora, a justificativa maior para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de ser o logaritmo uma função. As funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos deste tipo de variação, chamado variação exponencial, são encontrados em diversas áreas do conhecimento, como teremos oportunidade de ver, em quantidade e importância suficientes para justificar o enorme interesse das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas Ciências e na Tecnologia.

Por isso é que, mesmo com o advento e o uso universal das máquinas calculadoras, e a consequente perda de interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético, a importância científica dos mesmos não diminuiu nos dias de hoje e podemos afirmar sem exageros, que enquanto houver Ciência haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais.

Em consequência disso, é preciso que seu ensino se adapte a esta nova realidade. Deve ser considerado, sem preconceitos, logaritmos em qualquer base, tendo em conta, porém, o grande destaque dos *logaritmos naturais*, aqueles que têm por base o número e, bem como a função exponencial correspondente.

Mas, por que a função exponencial e^x é mais importante que as outras exponenciais, como 2^x ou 10^x? Por que preferir o logaritmo natural e não o decimal ou o logaritmo em qualquer outra base?

Afinal, quem é este tal de número *e* ?

O nosso objetivo é tentar responder a estas perguntas em nível do 2º grau, procurando dar uma visão desses tópicos, dando ênfase na importância atual e moderna das suas aplicações.

1.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Textos babilônios de cerca de 600A.C. trazem a seguinte questão que, em linguagem moderna, é posta num problema: ***"A que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado?"*** Esta questão equivale à nossa: Qual o logaritmo de um número dado, tendo um certo número como base? No 2º grau é comum se introduzir o logaritmo, baseado no conceito de exponenciação. A definição tradicional diz que: *" O logaritmo de um número positivo* ***x*** *num sistema de base* ***a*** ***(a > 0 e a ≠ 1)*** *é o expoente* ***y*** a *que se deve elevar a base* ***a*** *de modo que se tenha* $a^y = x$ *"*. Em símbolos escrevemos assim:

$$\boxed{log_a x = y \iff a^y = x}$$

Esta definição, como se vê, exige o conhecimento prévio do que seja potência com expoente real qualquer. (Existe uma outra maneira de se definir logaritmos, através de uma área, o que explora portanto um aspecto geométrico. Optamos pela definição clássica de logaritmo como um expoente, apesar das dificuldades que temos de explicar o significado de expoentes irracionais como, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$).

No final do século XVI, o desenvolvimento da astronomia, da navegação e do comércio exigia que se realizassem longos e trabalhosos cálculos aritméticos. Também neste século já eram praticados empréstimos ou investimentos a juros. Vejamos um exemplo:

Imaginemos que uma pessoa tenha empregado uma quantia $\mathbf{Q}$ a 15% ao ano. Isto significa que ao fim de cada ano, o capital empregado no inicio do referido ano deve crescer de 15%. Assim, após um ano, o montante será o capital inicial $\mathbf{Q}$ acrescido de 15% de seu valor:

$$\mathbf{Q + \frac{15}{100}Q = (1 + 0{,}15)Q = 1{,}15Q}\,.$$

Depois de 2 anos, o montante será:

$$\mathbf{(1{,}15)Q + (0{,}15)(1{,}15Q) = (1{,}15)(1{,}15)Q = (1{,}15)^2 Q}\,.$$

Analogamente, depois de 3 anos: $\mathbf{(1{,}15)^3 Q}$ e depois de n anos temos a expressão:

$$M = (1{,}15)^n Q \qquad (\text{ I})$$

onde M é o montante, Q é a quantidade empregada inicialmente e n é a duração do investimento (ou empréstimo) em anos.

E se o dinheiro fosse retirado após 2 anos e 197 dias?

Já no século XVI, sabia-se que, no caso de empréstimos a juros compostos, expressões do tipo (I) podiam ser utilizadas, mesmo que a duração do empréstimo n, não fosse um natural . Portanto, em (I)

$$n = 2 + \frac{197}{360} = \frac{917}{360} \quad , \quad \text{e então}$$

$$M = Q(1{,}15)^{\frac{917}{360}} .$$

Uma vez conhecida a definição da raiz n-ésima de um número a obtemos o significado para $a^{\frac{p}{q}}$, ou seja, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Assim sendo, como calcular

$$M = Q(1{,}15)^{\frac{917}{360}} = Q\sqrt[360]{(1{,}15)^{917}} \quad ?$$

Se hoje ainda este cálculo demanda algum esforço, imagine naquele tempo!

No século XVI, as operações eram classificadas em três espécies:

1ª espécie: adição e subtração

2ª espécie: multiplicação e divisão

3ª espécie: potenciação e radiciação

Como os cálculos eram trabalhosos, na falta de máquinas calculadoras e de computadores se recorria a grandes tabelas que reduziam operações de 2ª e de 3ª espécies em operações de 1ª espécie.

Para se ter uma idéia de como as multiplicações eram feitas, consideremos o exemplo de como se efetuar a multiplicação 1525 x 321 (os números usados poderiam ser bem maiores).

Usava-se a fórmula:

$$\boxed{x.\,y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

Efetuava-se o cálculo: $1525\text{x}321 = \left(\frac{1846}{2}\right)^2 - \left(\frac{1204}{2}\right)^2$ e recorria-se á tabela:

N	...	1203	1204	1205	...	1846
$(N/2)^2$	...	361802,25	362404	363006,25	...	851929

Assim, $1525\text{x}321 = \left(\frac{1846}{2}\right)^2 - \left(\frac{1204}{2}\right)^2 = 851929 - 362404 = 489525$

Outro recurso utilizado era o uso da fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]}}$$

(A trigonometria já era bastante conhecida naquele tempo!). Para calcular, por exemplo, 0,8988 x 0,9455 observava-se que 0,8988 ≅ cos 26°, 0,9455 ≅ cos 19°, cos 45° ≅ 0,7071 e cos 7° ≅ 0,9925.

(Fórmulas como as duas últimas apresentadas são chamadas de fórmulas de prostaférese, transformam produtos em soma).

Na procura de fórmulas que transformassem operações de 2ª em 1ª espécie, um tipo de tabela acabou chamando a atenção dos matemáticos pela sua simplicidade. Eram tabelas que calculavam produtos particulares de potências. Vejamos um exemplo simples do uso destas tabelas no cálculo de 16 x 32:

Consideremos uma tabela de potências de 2:

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Temos que $16 = 2^4$ e $32 = 2^5$ · Para multiplicarmos 16 por 32 basta somar os valores correspondentes dos expoentes na tabela (no caso 4 + 5) e ver qual o termo que corresponde a esta soma, conforme indicam as setas na figura a seguir:

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Observemos que a propriedade hoje formalizada por:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{n+m}}$$ **(Propriedade Fundamental)**

era fortemente usada e de certa forma transformava o produto em soma.

Analogamente, a divisão, como operação inversa da multiplicação podia ser feita, seguindo, na tabela, o sentido contrário das setas.

Consequentemente, era conhecida a propriedade que formalizamos hoje como:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}, \quad \textbf{para m > n}$$

Como caso particular, se ***m = n + 1***, temos:

$$\boxed{\frac{a^{n+1}}{a^n} = a^1}, \quad \textbf{para todo n natural}$$

Assim, por exemplo, a **razão** entre 128 e 64 é igual á razão entre 32 e 16, e assim por diante.

Os números situados na 2ª linha de cada tabela foram depois chamados de *logaritmo* (***logos*** - razão, ***arithmos*** - número).

Conservando a idéia de razão, vejamos como é natural definir 2^o e 2^{-n}, onde n $\in$ N.

Como seria completada a seguinte tabela, dando o valor conveniente para x **?**

Potências	x	2	4	8	...
Expoentes (*logaritmos*)	0	1	2	3	...

Pretendemos que a razão entre 4 e 2 seja igual á razão entre 2 e x, ou seja,

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{x}$$

Assim, desse modo, $\boldsymbol{x = \frac{2.2}{4} = 1}$, ou seja, define-se

$$\boxed{\mathbf{2^0 = 1}}$$

Do mesmo modo, podemos completar a seguinte tabela, dando o valor conveniente para y,

Potências	y	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	**...**
Expoentes (logaritmos)	-1	0	1	2	3	**...**

de forma que a razão entre 2 e 1 e entre 1 e y sejam iguais, ou seja:

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{y}$$

Daí obtemos $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$. Logo,

$$\boxed{\mathbf{y = 2^{-1} = \frac{1}{2}}}$$

Analogamente definimos 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, etc.

Podemos observar na nossa primeira tabela uma progressão aritmética (**P.A.**) de razão igual a 1 (2^a linha) e uma progressão geométrica (**P.G.**) de razão igual a 2 (1^a linha).

Em geral, construímos tabelas de P.A. de razão 1 e P.G. de razão a:

P.G.	a^n	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	**...**
P.A.	n	1	2	3	4	5	6	7	8	**...**

Vamos agora inserir termos na nossa tabela de modo a ter uma P.A. de razão 1/2:

P.G.	1	x_1	2	x_2	4	x_3	8	x_4	...
P.A.	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	...

Se a razão de 2 para x_1 deve ser igual á razão de x_1 para 1 $\left(\frac{2}{x_1} = \frac{x_1}{1}\right)$, pois estes números estão em P.G., então x_1 deve ser o número tal que $x_1^2 = 2$ (o número que hoje denotamos por $\sqrt{2}$), considerando x_1 positivo. Portanto, é conveniente definir

$$\boxed{2^{\frac{1}{2}} = x_1 = \sqrt{2}}$$

Se 2, x_2 e 4 são termos consecutivos de uma P.G. então:

$$\frac{x_2}{2} = \frac{4}{x_2}$$

$$x_2^2 = 2.4 = 8 = 2^3$$

$$x_2 = \sqrt{2^3}$$

$$Logo, \qquad \mathbf{2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}}$$

Usando o mesmo processo encontramos a definição para $2^{\frac{m}{2}}$, m $\in$ N.

Como faríamos para definir, por exemplo, $\mathbf{2^{\frac{1}{3}}}$?

Vamos agora inserir termos na nossa tabela de modo a obter uma P.A. de razão 1/3.

P.G.	1	x_1	x_2	2	x_3	x_4	4	...

P.A.	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2	...

Temos assim que : $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{x_1}$ (1) e $\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{x_2}$ (2), o que nos dá:

De (1) $x_1^2 = x_2$ e de $(2),$ $x_2^2 = 2x_1$, o que acarreta

$$x_1^3 = 2$$

É, portanto, conveniente definir $2^{\frac{1}{3}} = x_1$ onde x_1 é tal que $x_1^3 = 2$. (o número hoje denotamos por $\sqrt[3]{\mathbf{2}}$).

Analogamente, utilizando o mesmo processo, encontramos um significado para o caso geral

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{p, q} \in \mathrm{N}^*, \ a \in \mathrm{R}_+^*$$

Desde os babilônios já se tem registros de tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhante ás nossas tabelas atuais de logaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as 10 primeiras potências para as bases 9, 16, etc. As diferenças principais entre as tabelas antigas e as nossas, além da linguagem e notação, são que não é usado um número único como base em variadas situações e as lacunas que constam das tabelas antigas são muito maiores que as nossas. Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados.

Apesar de, como vimos, rudimentos do que viriam a ser futuramente os logaritmos, já serem conhecidos dos babilônios, a introdução dos logaritmos como instrumento que revolucionou totalmente a arte de calcular, dobrando o poder computacional dos astrônomos, ocorreu por volta do início do século XVII. Essa invenção é a atribuída universalmente ao nobre escocês John Napier (1550-1617).

Napier publicou a sua discussão dos logaritmos em 1614, sob o título de *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa lei dos logaritmos). O único rival de Napier como pretendente à invenção dos logaritmos foi um relojoeiro suiço, Jobst Burgi (1552-1632). A tábua de logaritmos de Burgi apareceu em 1620 sob o título de *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*. Ao que parece Napier e Burgi trabalharam independentemente, mas ambos buscavam um processo que tornasse mais simples os cálculos. A influência e o reconhecimento de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior que a de Burgi devido à data de publicação do seu trabalho além de seu relacionamento com professores universitários. Os dois, no entanto, foram guiados pelas mesmas influências. Partiram das propriedades das progressões aritméticas e geométricas estimulados, provavelmente, pelo método da prostaférese cuja fórmula a seguir já era conhecida

$$sen\,A\,sen\,B = \frac{1}{2}cos(A - B) - \frac{1}{2}cos(A + B)$$

De fato, já se conjeturou que a fórmula acima teria sido a origem das idéias de Napier, uma vez que ele construiu sua tábuas para logaritmos de senos de ângulos.

Embora muitas vezes o conceito de logaritmo esteja hoje associado ao de expoente, a apresentação original de Napier não se baseou nessa relação. A definição de logaritmo dada por Napier nada tinha a ver com expoentes - de fato, uma notação adequada e padronizada para expressar expoentes sequer havia sido desenvolvida plenamente até então. Na terminologia atual, se $a^x = y$, então o logaritmo de y na base a é x. Notemos que se x varia em P.A., y varia em P.G. Napier chegou a esta correspondência fundamental entre duas séries de números de modo geométrico, considerando as velocidades de dois pontos numa linha reta. Além disso, Napier não contava com a noção de base em seu sistema A possibilidade de definir logaritmos como expoentes foi reconhecida por John Wallis em 1685 e por Johann Bernoulli em 1694 .

Os logaritmos de base 10 - "*logaritmos comuns*", como são chamados hoje - foram calculados por Henry Briggs (1561-1631), professor da Universidade de Oxford e do

Grescham College de Londres. Seu interesse pelos métodos de Napier foi tão instigante que fez uma viagem ao encontro de Napier e durante esta visita os dois concordaram que as tábuas de Napier seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o de 10 fosse 1. Esta mudança resultou na invenção dos logaritmos "briggsianos" ou comuns , tão úteis nos cálculos.