10. OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um triângulo retângulo ABC e seja t um dos seus ângulos agudos.

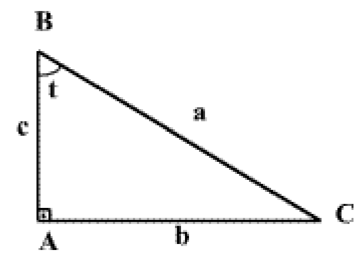

Figura 1

Relembremos que, sendo $0 < t < \pi/2$, temos

$$\text{tg } t = \frac{b}{c} \quad (= \text{cateto oposto} \div \text{cateto adjacente})$$

$$\cos t = \frac{c}{a} \quad (= \text{cateto adjacente} \div \text{hipotenusa})$$

$$\text{sen } t = \frac{b}{a} \quad (= \text{cateto oposto} \div \text{hipotenusa})$$

Considerando o inverso de cada uma destas razões definimos a cotangente, secante e cossecante de ângulos t, $0 < t < \pi/2$, como segue

$$\text{cotg t} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{tg t}}$$

$$\text{sec t} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos t}$$

$$\text{cossec t} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{sen } t}$$

Usando o círculo trigonométrico S^1, vamos estender as funções cotangente, secante e cossecante para ângulos e arcos quaisquer, lembrando a função de Euler E(t) definida anteriormente.

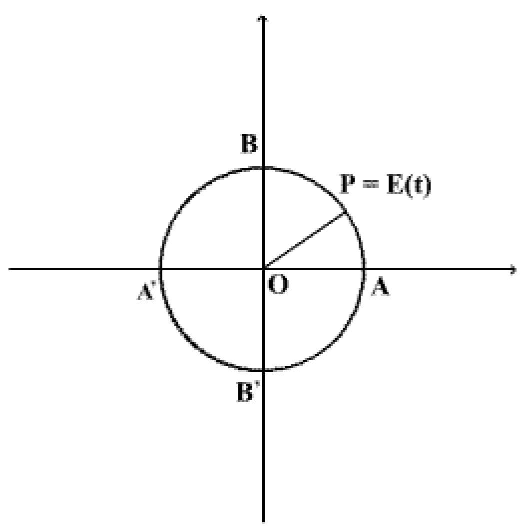

Figura 2

COTANGENTE

Dado $t \in R$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$, sejam $P = E(t)$ e C a interseção das retas OP e a tangente a S^1 no ponto $B(0,1)$.

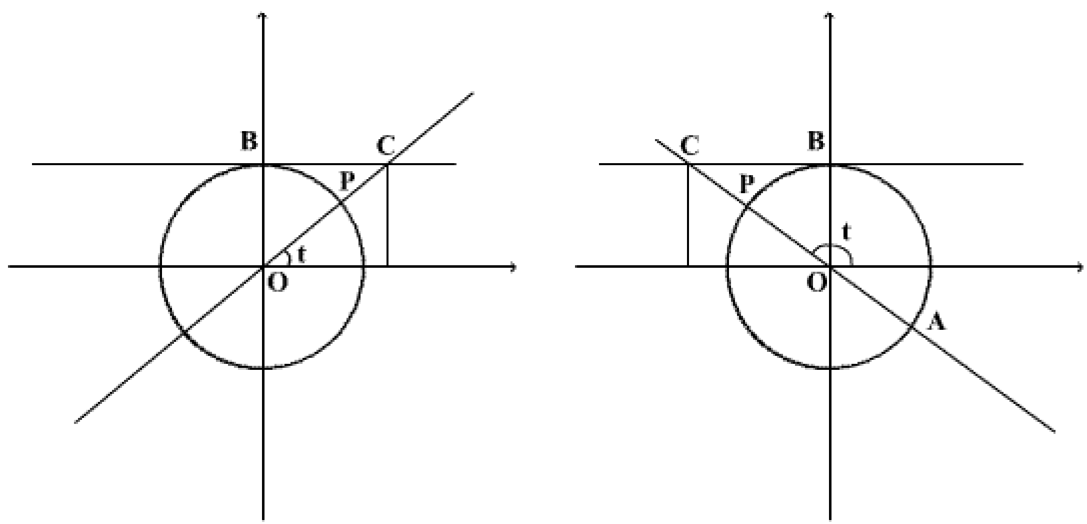

Figura 3

Definimos cotangente de t como sendo a medida algébrica do segmento BC, ou seja, a abscissa do ponto C no plano cartesiano.

Podemos observar que, para $t = k\pi$, $k \in Z$, $P = E(t) = E(0)$ ou $P = E(t) = E(\pi)$. Neste caso, a reta OP coincide com a reta OA e é paralela à tangente a S^1 em B. Logo, não existe o ponto de interseção C e, portanto, a cotangente não está definida.

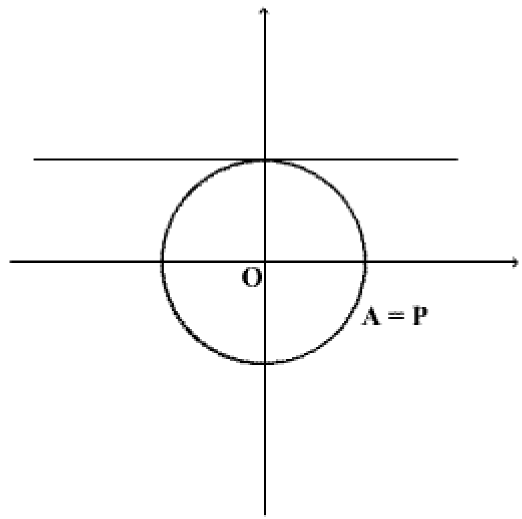

Figura 4

Função Cotangente

A função cotangente é a função f real de variável real, que associa a cada $t \in R$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$, o número $f(t) = \text{cotg } t$:

$$f: \{ t \in R; t \neq k\pi, k \in Z \} \longrightarrow R$$
$$t \longmapsto f(t) = \text{cotg } t$$

Propriedades da função cotangente

As seguintes propriedades podem ser verificadas facilmente a partir da definição e da análise no círculo S^1.

1. Imagem

- A imagem da função cotangente é R.

2. Sinal da função

- $\text{cotg } t > 0$, se t pertence ao 1º ou 3º quadrantes.
- $\text{cotg } t < 0$, se t pertence ao 2º ou 4º quadrantes.

3. Crescimento e decrescimento

- A função cotangente é decrescente em todos os intervalos do tipo ($k\pi$, $k\pi+\pi$), $k\in Z$.

4. Paridade

A função cotangente é ímpar: cotg (-t) = - cotg t.

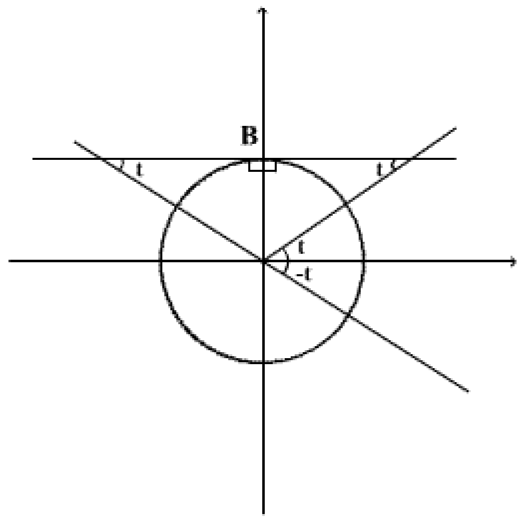

Figura 5

5. Periodicidade

- A função cotangente é periódica de período π: cotg ($t+\pi$) = cotg t.

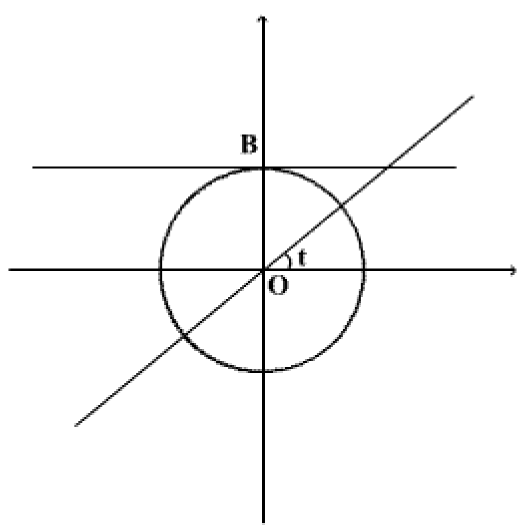

Figura 6

Gráfico

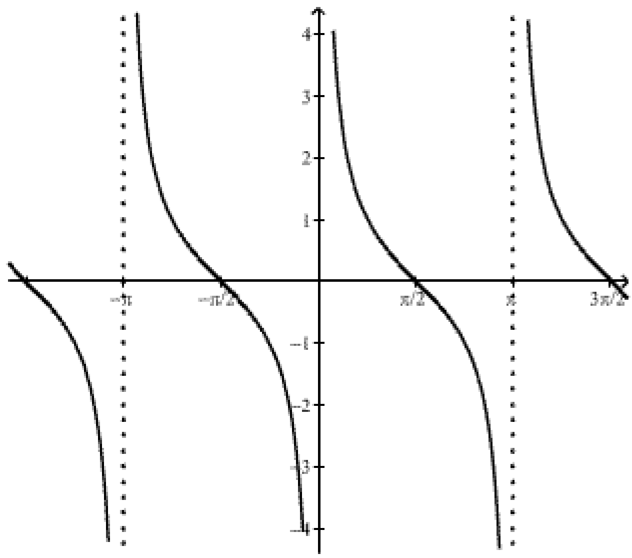

Figura 7

As retas $t = k\pi$, $k \in Z$, são chamadas assíntotas verticais do gráfico da função cotangente.

Mostraremos agora que a definição dada para cotangente é igual a $\text{cotg } t = \dfrac{\cos t}{\text{sen } t}$, para $t \neq k\pi$, $k \in Z$. De fato, se $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, temos $\text{cotg } t = 0 = \dfrac{\cos t}{\text{sen } t}$. Se $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$, então $P = E(t)$ é diferente de A, B, A' e B' (Figuras 2) e, portanto, temos os triângulos OPP_2 e OCB (Figuras 8), que são semelhantes.

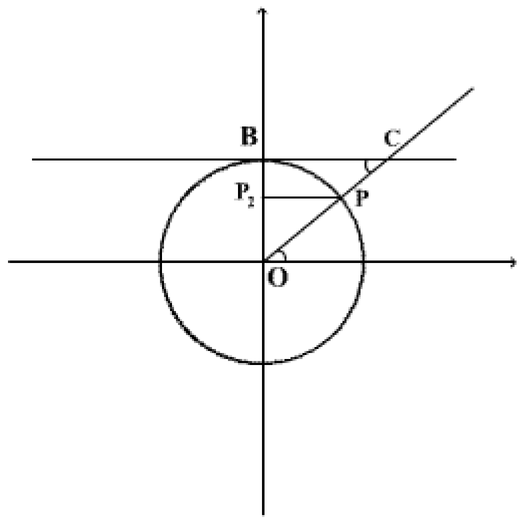

Figura 8

Usando a razão de semelhança, segue que $\dfrac{|BC|}{|OB|} = \dfrac{|PP_2|}{|OP_2|}$, ou seja, $\dfrac{|\cot g\ t|}{1} = \dfrac{|\cos t|}{|\operatorname{sen} t|}$.

Analisando os sinais de cotg t e de $\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$ nos quatro quadrantes, concluímos que

cotg t = $\dfrac{\cos\ t}{\operatorname{sen}\ t}$, $\forall\ t \neq k\pi,\ k \in Z$.

SECANTE

Dado $t \in R$, $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, seja $P = E(t)$. Consideremos a reta tangente a S^1 em P e seja S a sua interseção com a reta OA.

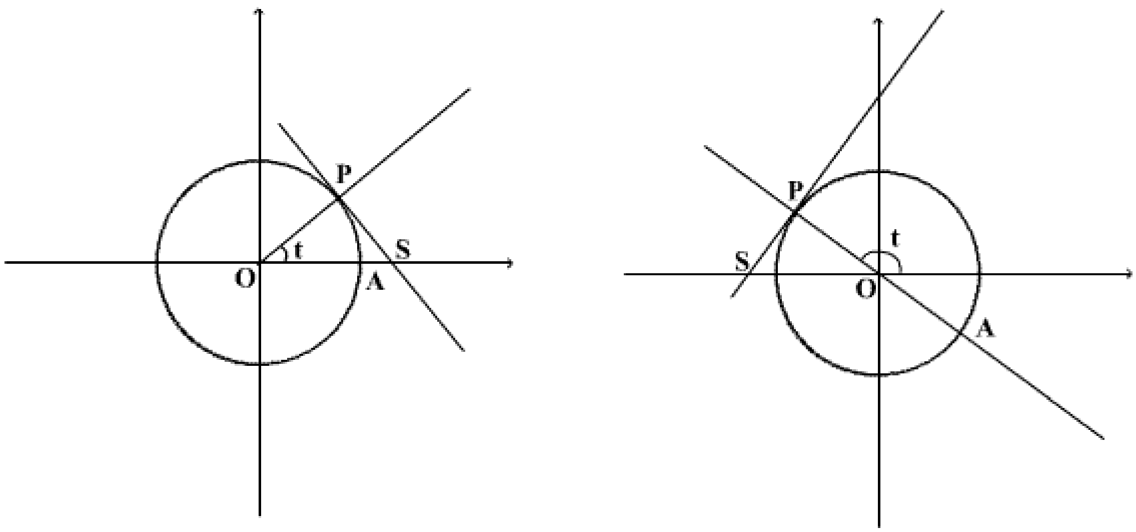

Figura 9

Definimos secante de t como sendo a medida algébrica do segmento OS, ou seja, a abscissa do ponto S no plano cartesiano.

Podemos observar que, para $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, a reta tangente a S^1 em P é paralela à reta OA e, portanto, não existe interseção e a secante não está definida.

Função Secante

A função secante é a função f real de variável real, que associa a cada $t \in R$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, $k \in Z$, o número $f(t) = \sec t$:

$$f: \{ t \in R;\ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \} \longrightarrow R$$
$$t \longmapsto f(t) = \sec t$$

Propriedades da função secante

1. Imagem

- A imagem da função secante é $\{ y \in R; y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1 \} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

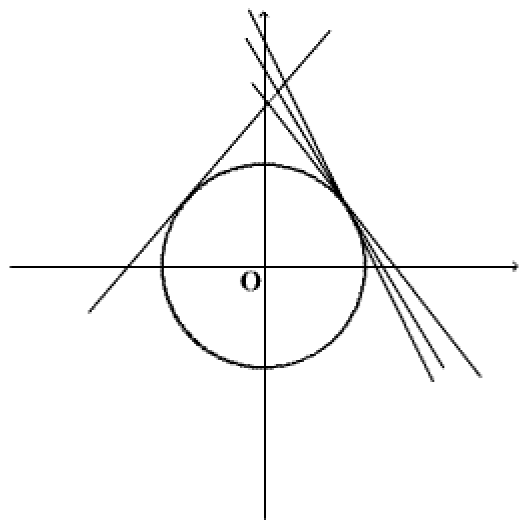

Figura 10

2. Sinal da função

- $\sec t > 0$, se t pertence ao 1º ou 4º quadrantes.
- $\sec t < 0$, se t pertence ao 2º e 3º quadrantes.

3. Crescimento e decrescimento

- A função secante é crescente em todos os intervalos dos tipos $[\, 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ ou $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\,]$, $k \in Z$.

- A função secante é decrescente em todos os intervalos dos tipos $[\, \pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,)$ ou $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\,]$, $k \in Z$.

4. Paridade

- A função secante é par: sec (-t) = sec t.

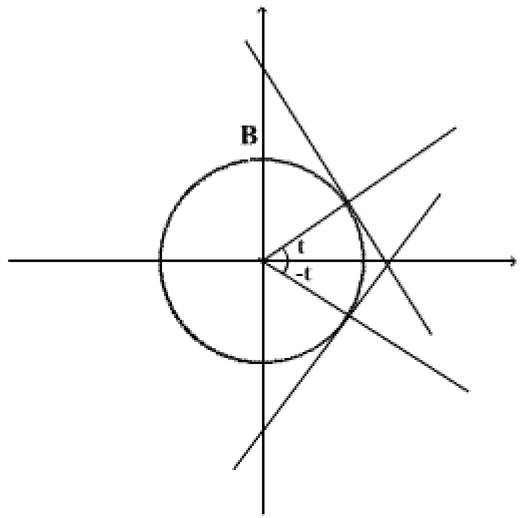

Figura 11

5. Periodicidade

- A função secante é periódica de período 2π: sec $(t+2\pi)$ = sec t.

Gráfico:

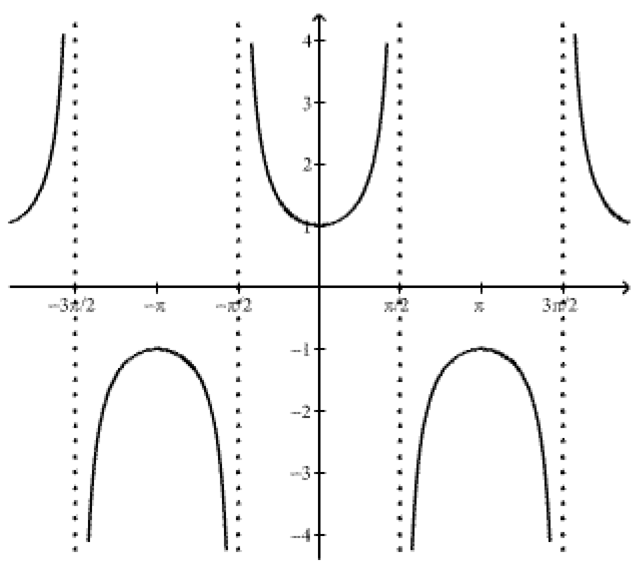

Figura 12

As retas $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$, são as assíntotas verticais do gráfico da função secante.

Considerando a definição dada para secante de t, podemos mostrar que $\sec t = \frac{1}{\cos t}$, para $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. De fato, se $t = k\pi$, $k \in Z$, temos $P = E(t) = E(0)$ ou $P = E(t) = E(\pi)$. Logo, $\sec t = 1 = \frac{1}{\cos t}$ ou $\sec t = -1 = \frac{1}{\cos t}$. Se $t \neq k\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, então $P = E(t)$ é diferente de A, B, A' e B' e, portanto, temos os triângulos retângulos semelhantes OPS e OPP_1 (Figuras 13).

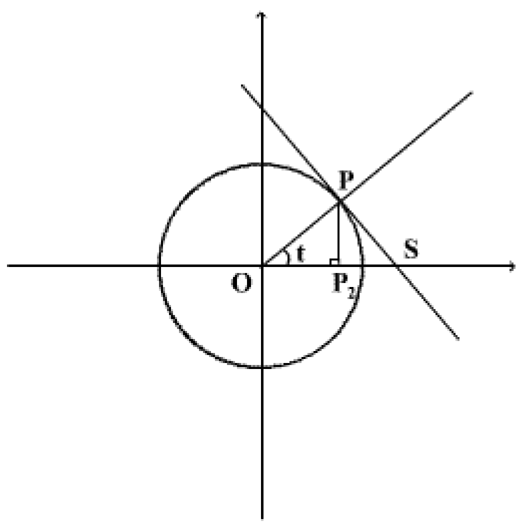

Figura 13

Daí, $\frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_1|}$, ou seja, $\frac{|\sec t|}{1} = \frac{1}{|\cos t|}$.

Analisando os sinais de $\sec t$ e de $\cos t$, nos quatro quadrantes, concluímos que

$\sec t = \frac{1}{\cos t}$, para $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

COSSECANTE

Dado $t \in R$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$, seja $P = E(t)$. Consideremos a reta tangente a S^1 no ponto P e seja C a sua interseção com a reta OB.

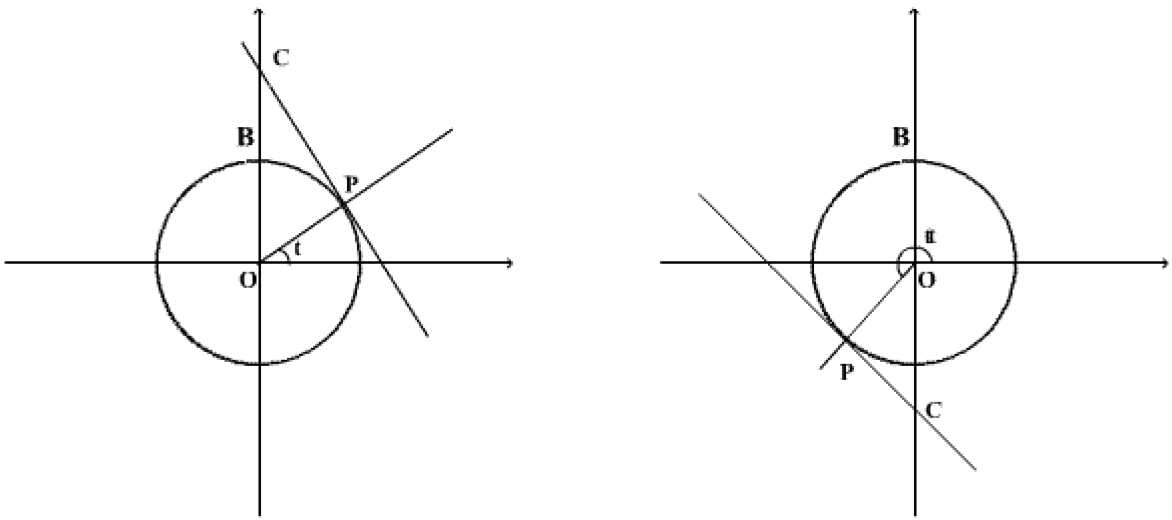

Figura 14

Definimos cossecante de t como sendo a medida algébrica do segmento OC, ou seja, a ordenada do ponto C no plano cartesiano.

Podemos observar que, para $t = k\pi$, $k \in Z$, $P = E(t) = E(0)$ ou $P = E(t) = E(\pi)$ e a reta tangente a S^1 em P é paralela à reta OB. Logo, não existe o ponto de interseção C e, portanto, a cossecante não está definida.

Considerando a definição dada para cossecante de t, podemos mostrar que $\text{cossec } t = \dfrac{1}{\text{sen } t}$, para $t \neq k\pi$, $k \in Z$. De fato, se $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, temos $P = E(t) = E(\dfrac{\pi}{2})$ ou $P = E(t) = E(\dfrac{3\pi}{2})$; logo $\text{cossec } t = 1 = \dfrac{1}{\text{sen } t}$ ou $\text{cossec } t = -1 = \dfrac{1}{\text{sen } t}$. Se $t \neq$

$k\frac{\pi}{2}$, então P é diferente de A, B, A' e B' e, portanto, temos os triângulos retângulos OCP e O P_2P (Figuras 15), que são semelhantes.

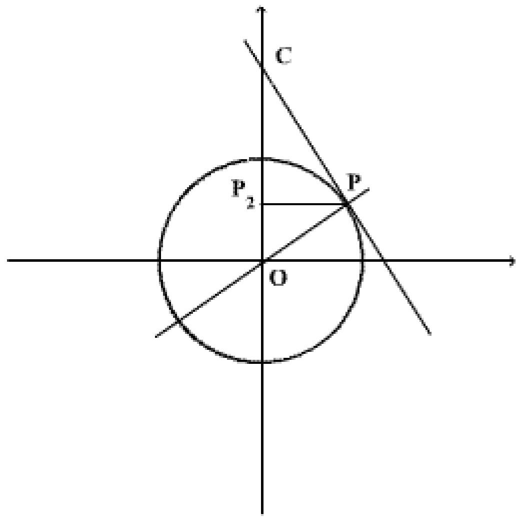

Figura 15

Usando a razão de semelhança, segue que $\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|PO|}{|OP_2|}$, ou seja, $\frac{|\cos\sec t|}{1} = \frac{1}{|\text{sen } t|}$.

Analisando os sinais de cossec t e de sen t nos quatro quadrantes, concluímos que

cossec t = $\frac{1}{\text{sen } t}$, $\forall\ t \neq k\pi,\ k \in Z$.