12. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Função arco-seno

A função seno, f: $R \to R$, onde f(x) = sen x não é injetora (pois, $\pi \neq 0$ e $\text{sen}\pi \neq \text{sen}0$) e não é sobrejetora (pois, $\nexists\, x \in R; \text{sen } x = 3$). Portanto, não é bijetora e conseqüentemente não admite inversa.

Porém, a função g, restrição de f, definida por $g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$; g(x) = sen x é bijetora; como pode ser constatado através do seu gráfico a seguir.

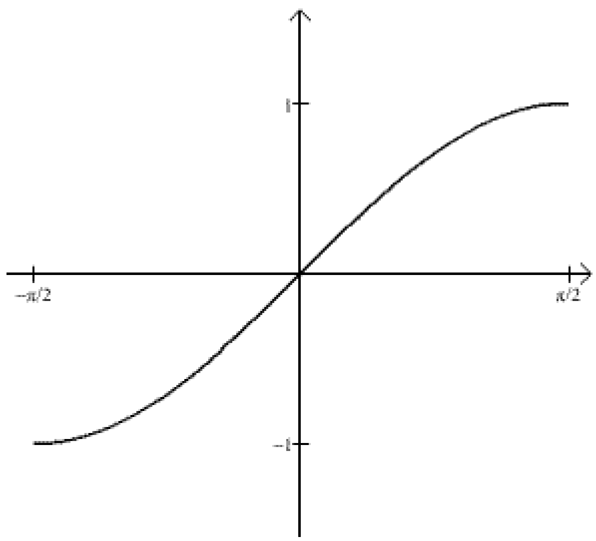

Figura 1

Assim sendo, a função g admite inversa g^{-1}, chamada de função arco-seno. Definida por:

$$g^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \text{arc sen } x$$

OBS: arc sen x significa "o arco cujo seno é x"
Logo,

$$\boxed{y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x\,,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \ \text{ e } \ -1 \leq x \leq 1}$$

Conseqüência: arc sen (sen y) = y e sen (arc sen x) = x; y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $x \in [-1,1]$.

Exemplo:
Calcule arc sen (1/2).

R] arc sen (1/2) = y , y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\Leftrightarrow$ sen y = $\frac{1}{2}$, y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\Leftrightarrow$ y = $\frac{\pi}{6}$

Gráfico

Já vimos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta y = x. Então, a partir do gráfico de g podemos obter o gráfico de g^{-1}.

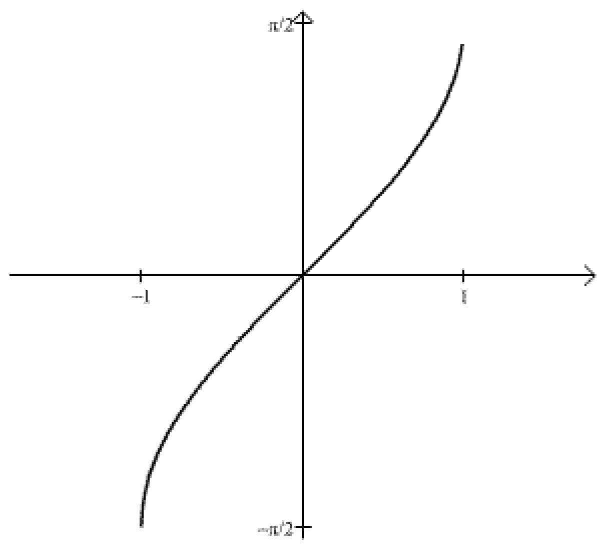

Figura 2

Função arco-cosseno

A função cosseno, f: R→R, onde f(x) = cos x não é injetora (pois, $\pi/2 \neq 3\pi/2$ e $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2)$) e não é sobrejetora (pois, $\nexists\, x \in R; \cos x = 3$). Portanto, não é bijetora e conseqüentemente não admite inversa.

Porém, a função g, restrição de f, definida por $g:[0,\pi] \to [-1,1]$; g(x) = cos x é bijetora; como pode ser constatado através do seu gráfico a seguir.

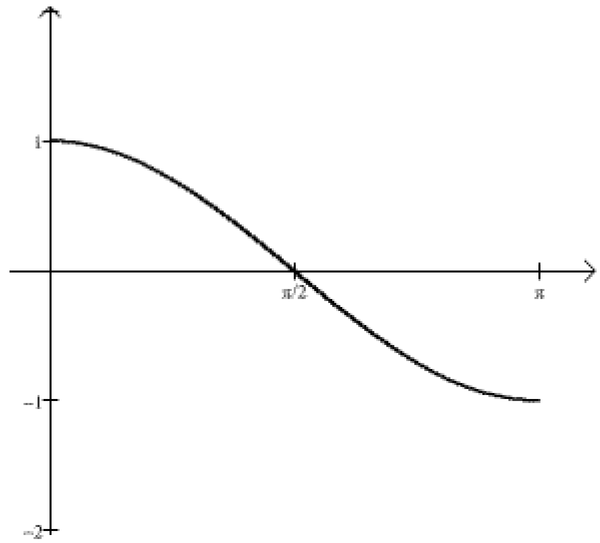

Figura 3

Assim sendo, a função g admite inversa g^{-1}, chamada de função arco-cosseno. Definida por:

$$g^{-1} : [-1,1] \to [0, \pi]$$
$$x \mapsto \text{arc}\cos x$$

OBS: arc cos x significa "o arco cujo cosseno é x"
Logo,

$$\boxed{y = \text{arc}\cos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ , } 0 \;\; 0 \le y \le \pi \quad \text{e} \quad -1 \le x \le 1}$$

Conseqüência: arc cos (cos y) = y e cos (arc cos x) = x, $y \in [0, \pi]$ e $-1 \le x \le 1$

Exemplo:
Calcule arc cos(-1/2).
R] arc cos (-1/2) = y , $y \in [0, \pi] \Leftrightarrow \cos y = -\frac{1}{2}$, $y \in [0, \pi] \Leftrightarrow y = \frac{5\pi}{6}$

Gráfico

A partir do gráfico de g podemos obter o gráfico de g^{-1}.

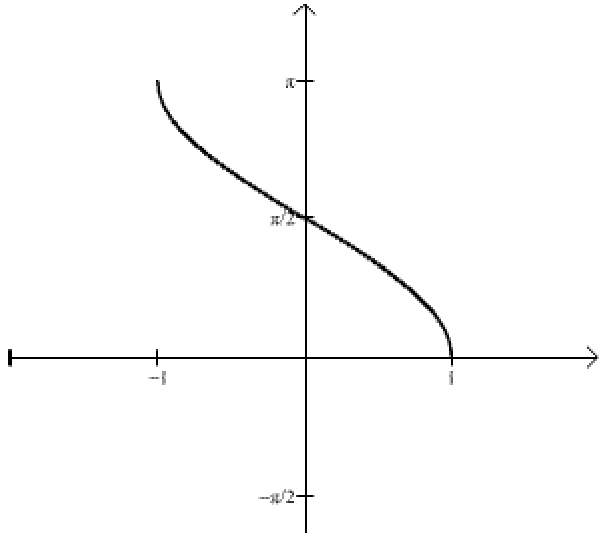

Figura 4

Função arco-tangente

A função tangente, f: $\left\{x \in R; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in Z\right\} \rightarrow R$, onde f(x) = tg x é sobrejetora (como já tínhamos visto anteriormente) mas, não é injetora (pois, $0 \neq \pi$ e tg(0) ≠ tg(π). Portanto, não é bijetora e conseqüentemente não admite inversa.

Porém, a função g, restrição de f, definida por $g:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \rightarrow R$; g(x) = tg x é bijetora; como pode ser constatado através do seu gráfico a seguir.

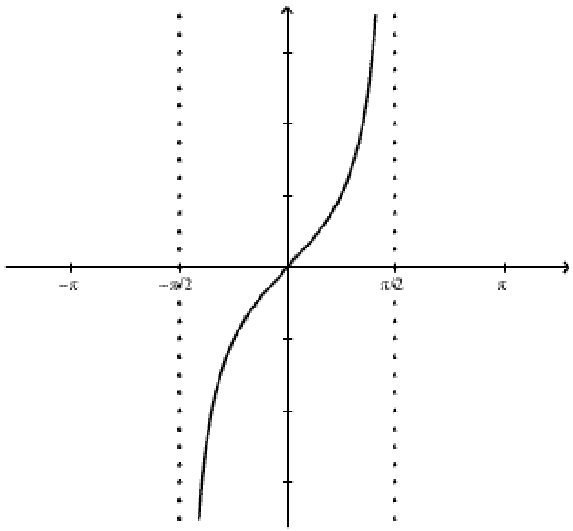

Figura 5

Assim sendo, a função g admite inversa g^{-1}, chamada de função arco-tangente. Definida por:

$$g^{-1} : R \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \text{arc tg } x$$

OBS: arc tg x significa “o arco cuja tangente é x”

Logo,

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow \text{tg } y = x \,,\; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \;\text{ e } x \in R}$$

Conseqüência: arc tg (tg y) = y e tg (arc tg x) = x, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ e $x \in R$.

Exemplo:
Calcule arc tg(1).

R] arc tg (1) = y , y $\Leftrightarrow$ tg y = 1 , $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$

Gráfico

A partir do gráfico de g podemos obter o gráfico de g^{-1}.

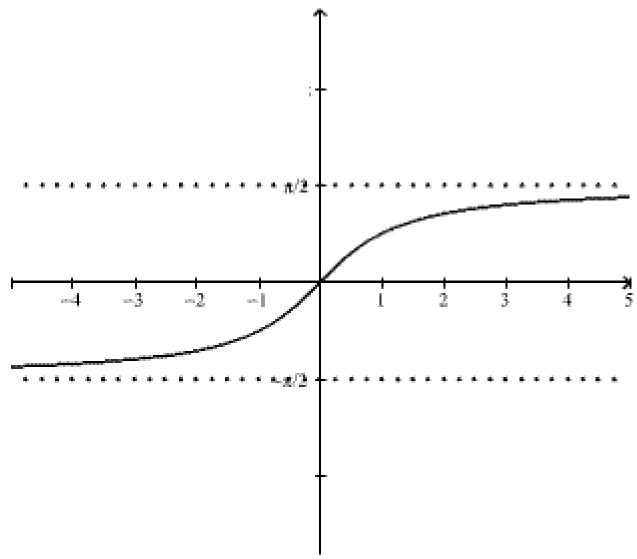

Figura 6