2. A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente aos catetos b e c (Figura 1).Sabemos do ensino fundamental as definições:

O seno de $\hat{B}$ é igual à razão entre o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa, e é indicado por sen ($\hat{B}$);

O cosseno de $\hat{B}$ é igual à razão entre o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa, e é indicado por cos ($\hat{B}$).

A tangente de $\hat{B}$ é igual à razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a $\hat{B}$, e é indicada por tg ($\hat{B}$).

Portanto:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}(\hat{B}) = \frac{b}{c}$$

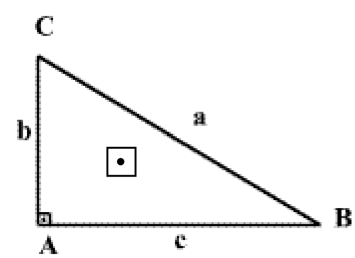

Figura 1

Estas equações definem o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo qualquer, visto que:

Todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo.

Dois triângulos retângulos quaisquer, que tenham um mesmo ângulo agudo, são semelhantes. Isto é, se os triângulos ABC e A'B'C' são tais que $\hat{B} = \hat{B}'$ então (Figura 2) são semelhantes. Neste caso temos,

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Logo, sen $\hat{B}$' = sen $\hat{B}$, cos $\hat{B}$' = cos $\hat{B}$ e tg $\hat{B}$' = tg $\hat{B}$.

Portanto, <u>o seno, o cosseno, e a tangente dependem apenas do ângulo agudo e não do triângulo considerado .</u>

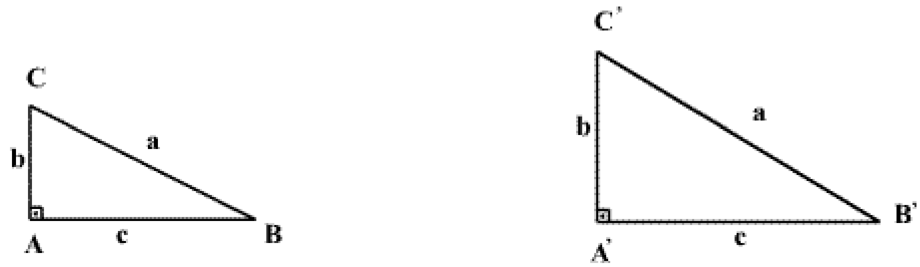

Figura 2

Observemos que dado o triângulo retângulo ABC (figura 1), como $b = a \operatorname{sen}\hat{B}$ e $c = a \cos \hat{B}$, então,

$$\boxed{\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{a \operatorname{sen}\hat{B}}{a\cos\hat{B}} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}}$$

As funções seno de $\hat{B}$, cosseno de $\hat{B}$ e tangente de $\hat{B}$ são chamadas de <u>funções trigonométricas.</u>

Observemos ainda que, $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \cos \hat{C} = \cos(90^0 - \hat{B})$,

isto é : <u>o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo do seu complementar</u>, o que justifica a denominação co-seno.

Como exemplo temos :

$\cos 30^0 = \operatorname{sen}(90^0 - 30^0) = \operatorname{sen} 60^0$

$\cos 45^0 = \operatorname{sen}(90^0 - 45^0) = \operatorname{sen} 45^0$.

A Relação Fundamental

Dado um triângulo retângulo ABC (Figura 1), temos :

$$(\cos\hat{B})^2 + (\mathrm{sen}\hat{B})^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{(b^2 + c^2)}{a^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $c^2 + b^2 = a$, chegamos então à seguinte relação, chamada de <u>relação fundamental</u>:

$$\boxed{\cos^2 \hat{B} + \mathrm{sen}^2 \hat{B} = 1}$$