3. ARCOS E ÂNGULOS

Já temos a definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo θ, quando θ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, isto é, θ é um ângulo agudo tal que $0 \leq \theta < 90°$. O nosso objetivo agora é estender esses conceitos para o ângulo nulo e para os ângulos maiores ou iguais a $90°$. Melhor ainda, queremos que as funções trigonométricas tenham significado não apenas para ângulos, mas para um número real qualquer, e que sejam mantidas as relações básicas:

$$\boxed{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\text{tg}\ \theta = \text{sen}\ \theta / \cos \theta}$$

Para isto será de fundamental importância, como veremos, a noção de comprimento de uma curva, mais particularmente, do círculo.

De uma maneira geral a noção de medida pressupõe uma comparação (razão) entre grandezas. Por exemplo, a medida ou comprimento de um segmento de reta AB é um número que deve exprimir "quantas vezes" o segmento AB contém o segmento u, fixado previamente, que se convenciona tomar como unidade de comprimento ou como segmento unitário. A partir dessa idéia simples pode-se chegar a uma definição precisa do comprimento de um segmento de reta.

A definição de comprimento de uma curva já não é tão simples. Intuitivamente podemos pensar no comprimento de uma curva como sendo o comprimento de um fio (de arame ,por exemplo) que foi ajustado sobre a curva . Para o círculo em particular, temos uma idéia mais refinada. Tomemos para isto um polígono convexo, inscrito num círculo, com n lados. Se o número de lados for suficientemente grande, a nossa intuição diz que o perímetro desse polígono será muito próximo do comprimento do círculo.(*veja, na figura abaixo, um círculo e dois polígonos nele inscritos: um quadrado e um octógono*)

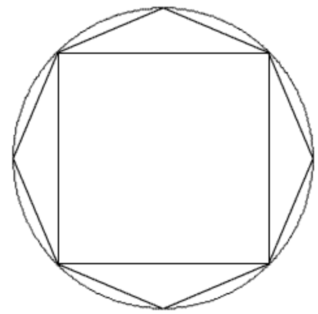
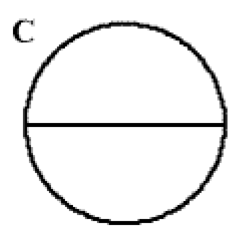


Figura 1

Usando este raciocínio, matemáticos babilônios (2000 a.C.) observaram que a *razão entre o comprimento de qualquer círculo e o seu diâmetro era constante, aproximadamente igual a 3. Mais tarde, os gregos chegaram à aproximação 3,14 para este número.* Esta razão, que de fato é uma constante, corresponde ao número irracional que hoje conhecemos como o <u>número π</u> . Assim, se um círculo tem comprimento C e diâmetro $2r$ temos que:

$\frac{C}{2r} = \pi$, ou equivalentemente , $\boxed{C = 2\pi\, r}$.



$$\frac{C}{2r} = \pi$$

Figura 2

Quando r = 1, temos pela relação anterior, $C = 2\pi$. Por essa razão, diz-se que:

" *O número* π *é o comprimento do semicírculo de raio igual a um* ".

Agora que já temos uma idéia do significado do comprimento de um círculo vamos introduzir mais alguns conceitos para dar continuidade à nossa idéia, que é de estender as definições das funções trigonométricas.

Dados dois pontos distintos A e B sobre um círculo, este fica dividido em duas partes (Figura 3). Cada uma destas partes que incluem A e B é chamada de *arco do círculo* e é indicada por AB. Se AB é um diâmetro, isto é, (passa pelo centro do círculo) então os arcos determinados são dois *semicírculos.* A reta que passa por A e B divide o plano em dois semi-planos. Se AB não é um diâmetro, o arco que fica no mesmo semi-plano que contém o centro do círculo é chamado de *arco maior* e o que fica no outro semi-plano é chamado de *arco menor*. Se A=B dois arcos são determinados: O *arco nulo*, e o círculo inteiro, ou *arco de uma volta.*

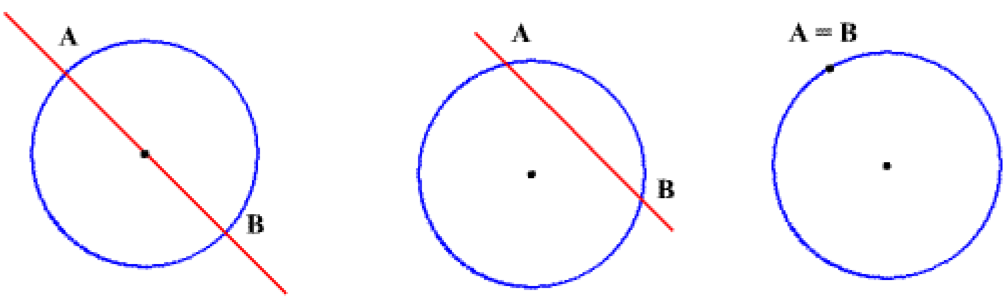


Figura 3

Definido o que é um arco de círculo podemos pensar que a propriedade mais natural a ser medida num arco é o seu comprimento. Entenderemos como <u>comprimento do arco AB</u>, o comprimento do segmento AB' que seria obtido se pudéssemos "esticar", ou retificar, o arco AB.

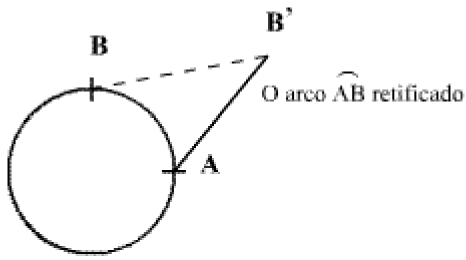


Figura 4

Dados dois pontos A e B sobre um círculo de centro em O então o ângulo AÔB é chamado de <u>*ângulo central*</u>. Dizemos também que o *arco menor AB subtende o ângulo central AÖB.*

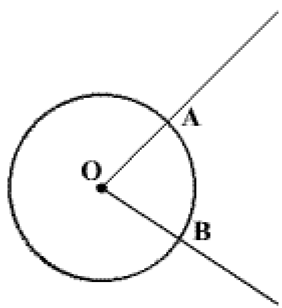


Figura 5