

4. MEDIDAS DE ÂNGULOS E DE ARCOS; GRAU E RADIANO

Existem diversas maneiras de se medir ângulos, dependendo da unidade que se adota. Há duas unidades que se destacam: O grau e o radiano.

- grau é uma unidade de medida para ângulos e mede a "abertura" de um ângulo. É obtido dividindo-se o ângulo raso em 180 partes, e o ângulo correspondente a uma dessas partes é chamado de ângulo de 1 grau.

Dizemos, de modo natural, que um arco AB que subtende um ângulo de θ graus, tem medida angular θ . Resumindo, temos:

↪ *A medida angular, em graus, do arco menor AB é a medida do ângulo central $A\hat{O}B$, tomada em graus.*

Assim, o grau passa a ser também uma unidade de medida também para arcos. Deve ficar claro que esta é uma medida angular, que é diferente da medida, ou comprimento, desse arco.

Na figura abaixo temos dois arcos com a mesma medida angular, mas com comprimentos diferentes.

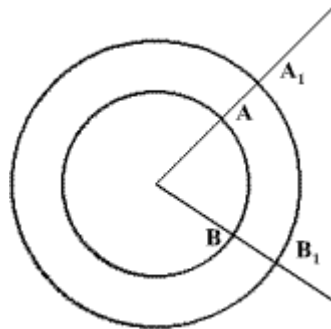


Figura 1

Para introduzir outra unidade de medida para ângulos, e conseqüentemente para arcos, faremos algumas considerações.

Inicialmente, vamos lembrar um resultado da Geometria Plana:

↳ “Dois arcos de círculos são semelhantes se subtendem um mesmo ângulo central e a razão de semelhança é a razão entre os raios”.

Considerando os círculos concêntricos de raios r e r' , sejam s e s' os comprimentos dos arcos AB e $A'B'$ respectivamente. Temos que $\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$

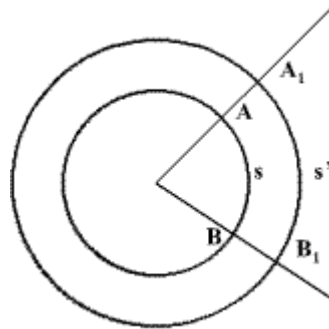


Figura 2

Observemos que a razão entre o comprimento dos arcos e os raios é constante. Isto nos leva a relacionar esta constante a uma nova medida para ângulos.

Consideremos um ângulo central $\hat{A}OB$ em um círculo de raio R que subtende o arco AB de comprimento S . Definimos a medida em radianos do ângulo $\hat{A}OB$ como sendo a razão entre o comprimento S do arco AB e o seu raio R .

$$\hat{A}OB = \frac{S}{R} \text{ radianos}$$

Analogamente, a medida em radiano do arco AB é a medida em radiano do correspondente ângulo central.

Usamos abreviadamente os termos rad, rd, para exprimir o radiano

Como conseqüências da definição de radiano temos que:

1) Um ângulo de 1 radiano é o que subtende um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo que o contém.

2) Se S é o comprimento do arco determinado por um ângulo central de medida igual a α radianos em um círculo de raio R então

$$\alpha \text{ rad} = \frac{S}{R} \Rightarrow S = \alpha R$$

Assim, se queremos encontrar o comprimento de um arco que subtende um determinado ângulo central, a medida deste ângulo deve estar expressa em radiano para se usar a fórmula acima.

3) Como um semicírculo é um arco que subtende um ângulo de 180° e o seu comprimento é $S = \pi R$, temos que $\frac{\pi R}{R} \text{ rad} = 180^\circ$, ou seja,

$$\pi \text{ rd} = 180^\circ$$

Além disso,

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \cong 57^\circ$$

Observações:

1) A medida do comprimento de um arco depende da unidade de comprimento considerada.

2) A medida de um ângulo em radiano não depende da unidade de comprimento considerada, desde que, obviamente, tomemos o comprimento do raio e do arco correspondentes nas mesmas unidades.

3) Quando $R = 1$, a medida do ângulo (e do arco correspondente) em radiano coincide com a do comprimento do arco.