3.APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

A Trigonometria relaciona ângulos com segmentos, por isso é muito eficiente como instrumento de cálculo na geometria, permitindo medir comprimentos inacessíveis às medidas diretas.

As aplicações da trigonometria no cálculo de medidas inacessíveis já eram feitas na antigüidade, séculos antes de Cristo, como veremos nos três exemplos a seguir.

I. A Grécia e o Cálculo do Raio da Terra

Os gregos usaram o seguinte método para medir o raio da Terra :

Sobe-se em uma torre de altura h e mede-se o ângulo θ que faz a reta BC do horizonte de B com a vertical BO do lugar. Sendo R o raio da terra temos (figura 3) :

$$\boxed{\frac{R}{R+h} = \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \text{Logo,} \quad R = \frac{h \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}}$$

Portanto, se tivermos as medidas de h e θ que são acessíveis podemos calcular o raio R da Terra.

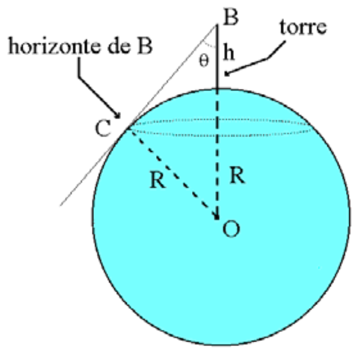


Figura 3

II. Eratóstenes e o Cálculo da Circunferência e do Raio da Terra

Eratóstenes (277-196 A.C.) era Bibliotecário-Chefe do Museu de Alexandria, e foi nos livros que tomou conhecimento do seguinte fenômeno: Quando o sol se encontrava mais ao norte, os raios solares caiam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siena, a 800 km de Alexandria *(isto era sabido porque a imagem do sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos desta cidade.* Naquela mesma hora, em Alexandria, os raios caiam inclinadamente, fazendo um ângulo de aproximadamente $7,2^{0}$ com a vertical, ou seja, 1/50 da circunferência completa, que corresponde ao ângulo de 360^{0} *(esse ângulo era medido através da comparação da sombra de um obelisco, por exemplo, com a sua altura)*
(Figuras 4 e 5)

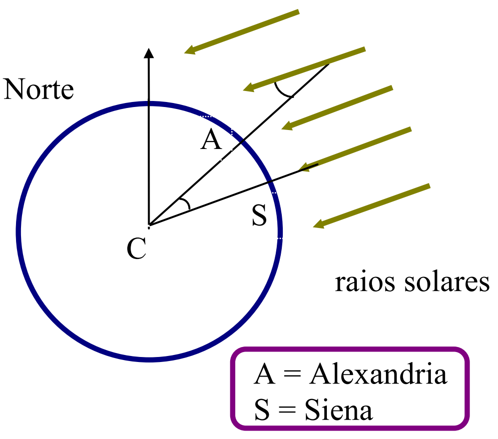


Figura 4

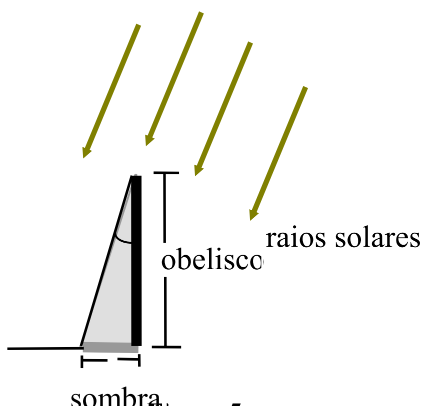


Figura 5

Como os raios solares são praticamente paralelos entre si, então o ângulo central $A\hat{C}S$ também mede 7,2º.

Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos, temos:

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360}{7,2},$$

onde R é o raio da Terra.

Como a distância de Alexandria a Siena é 800 km, temos

$$2\pi R = 800 \text{ x } \frac{360}{7,2} = 40.000$$

Usando (como faziam os gregos) 3,14 para o valor de π, obtemos que o raio da Terra é de aproximadamente R = 6.366 km

✎ Sabe-se atualmente que a circunferência da Terra mede 40.024 km e o raio 6378 km

III . Aristarco de Samos e as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol

Existem duas posições da Lua em sua órbita, "o quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura. (Figura 6).

Quando isso ocorre, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo em L (Figura 7).

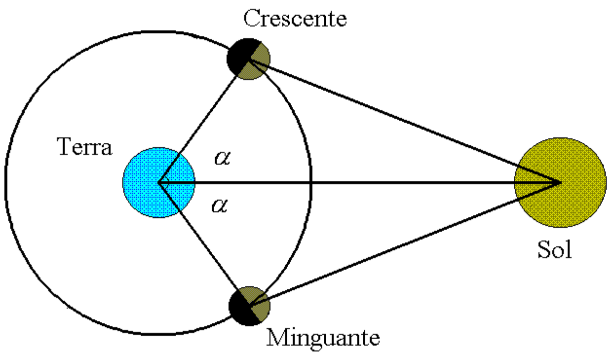


Figura 6

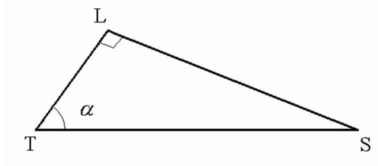


Figura 7

Para calcular o ângulo α (Figura 7) basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo da passagem de minguante para crescente. O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante para crescente durava 14,25 dias. Admitindo uma velocidade uniforme da Lua em sua órbita, podemos escrever a proporção:

$$360^0 \;\_\_\_\_\; 29{,}5$$
$$2\alpha \;\_\_\_\_\; 14{,}25$$

ou seja,

$$\frac{360}{2\alpha} = \frac{29{,}5}{14{,}25}$$

Donde obtemos $2\alpha = \dfrac{14{,}25 \, . \, 360}{29{,}5}$, logo $\alpha = 86{,}95^0$.

Portanto (Figura 7) $\dfrac{TL}{TS} = \cos\alpha = 0{,}053$. Então, a relação entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua deve ser $\boxed{TS = 18{,}8 \; TL}$

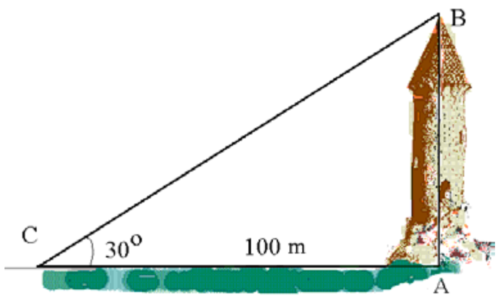
> ➪ O resultado de Aristarco está muito longe do valor conhecido hoje, TS ≅ 400 TL. Ao que tudo indica o erro de Aristarco no cálculo de α deve-se à peculiaridade do movimento da Lua na época. (*conforme G. Abell em seu livro, Exploration of the Universe*)

EXEMPLOS COMPLEMENTARES

As idéias usadas nesses exemplos são simples e excepcionais ao mesmo tempo, e servem como uma excelente motivação para o estudo da Trigonometria. Apresentamos a seguir mais três exemplos das conexões da Trigonometria com os problemas do dia-a-dia.

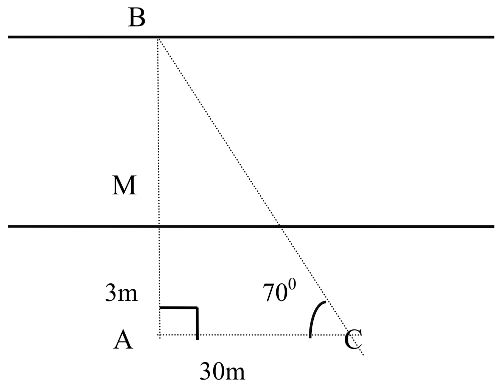
1) O topo de uma torre vertical AB é visto de um ponto C do solo sob um ângulo de 30^o. A distância de C à base da torre é 100m. Calcule a altura da torre.

Obs.: $tg\ 30^o \cong 0{,}58$



Resp.: 58m

2) Para medir a largura de um rio de margens paralelas, sem atravessá-lo, um observador no ponto A visa um ponto fixo B na margem oposta, perpendicularmente às margens. De A, ele traça uma perpendicular à linha AB e marca sobre ela um ponto C, distando 30m de A. Em seguida, ele se desloca para C, visa os pontos B e A, e mede o ângulo $B\hat{C}A = 70^0$. Sabendo que a distância, sobre AB, de A à margem do rio é de 3m e que $tg\ 70^0 \cong 2{,}75$, calcule a largura do rio.

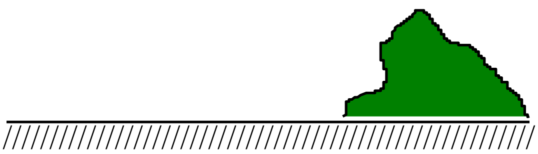


Resp.: 79,5

3) Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15^0 (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância de 20m em direção à montanha ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30^0. Qual é a altura da montanha?

Obs.: tg $30^0 \cong 0.58$

tg $15^0 \cong 0,27$



Resp.: 10,1