5. O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO E A FUNÇÃO DE EULER

Um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo dizemos que o círculo está *orientado*. Tradicionalmente, em Matemática, escolhemos o sentido *anti-horário* como *positivo*.

Consideremos no sistema de coordenadas cartesianas o círculo com centro em (0,0) e raio 1, também chamado de círculo unitário, orientado. Fixemos no círculo unitário o ponto A(1,0), que será chamado de origem dos arcos. O círculo definido acima é chamado de *círculo trigonométrico* e será designado por S^1.

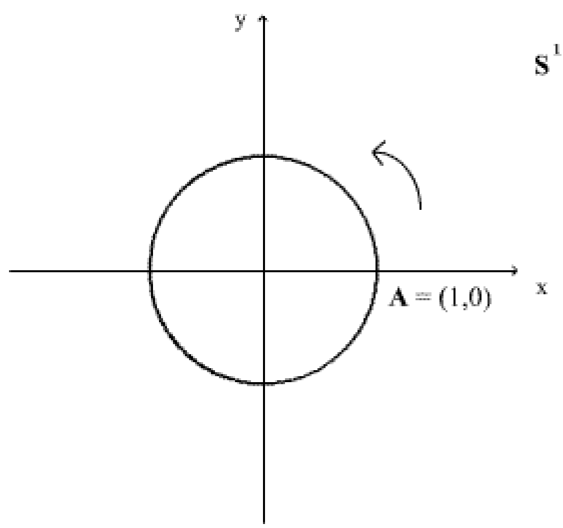


Figura 1

Definimos a *medida algébrica* de um arco AB de S^1 como sendo o comprimento deste arco associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for o anti-horário e negativo em caso contrário. Esta medida será representada por AB.

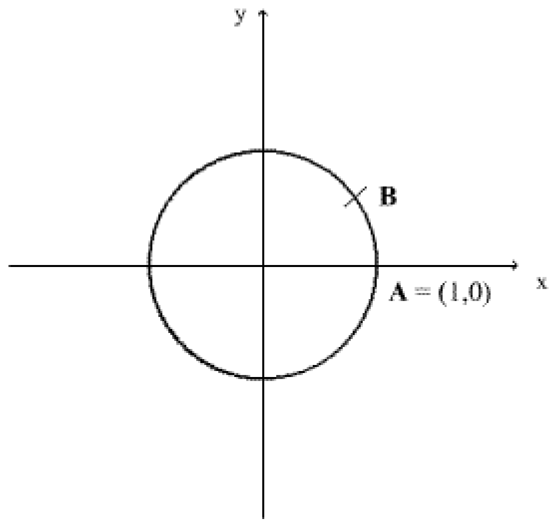


Figura 2

Observe que como S^1 tem raio unitário o módulo da medida algébrica de AB corresponde á medida do arco em radiano, ou seja, AB = |m AB| rad.

Vamos agora definir uma aplicação E de R em S^1, chamada de *função de Euler*, que associa a cada número real t um ponto P de S^1, chamado de *imagem* de t no círculo, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E: R &\rightarrow S^1 \\ t &\rightarrow E(t) = P = (x,y) \end{aligned}$$

Tal que,

1) Se $t = 0$ então $P = A$, isto é, $E(0) = A$.

2) Se $t > 0$ realizamos um percurso de comprimento t a partir de A, no sentido anti-horário e marcamos $P = E(t)$ como ponto final deste percurso , isto é m AP = t.

3) Se $t < 0$ então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|t|$ no sentido horário e marcamos $P = E(t)$ como ponto final deste percurso, isto é mAP = t.

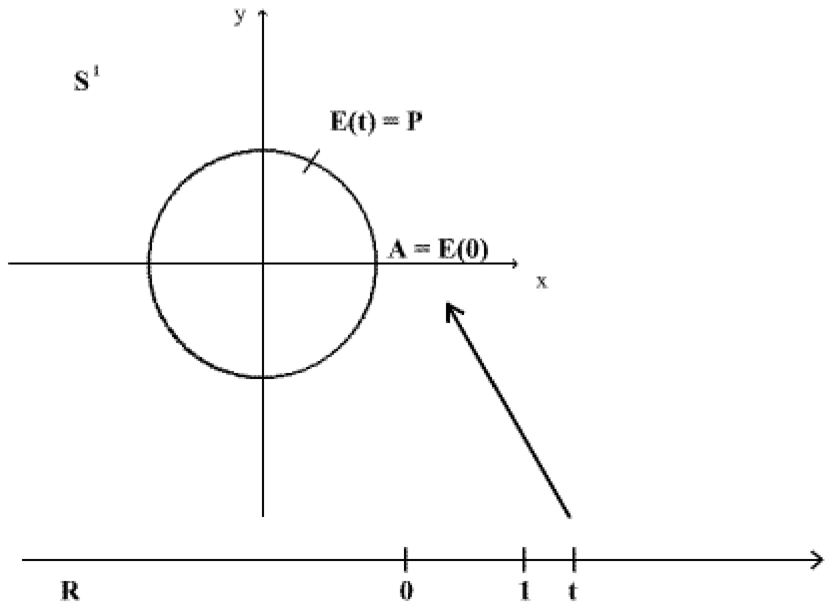


Figura 3

Exemplo:

Dado o círculo trigonométrico abaixo (Figura 4), temos :

$E(0) = A$, $E(\pi/2) = B$, $E(\pi) = A'$ e $E(-\pi/2) = E(3\pi/2) = B'$

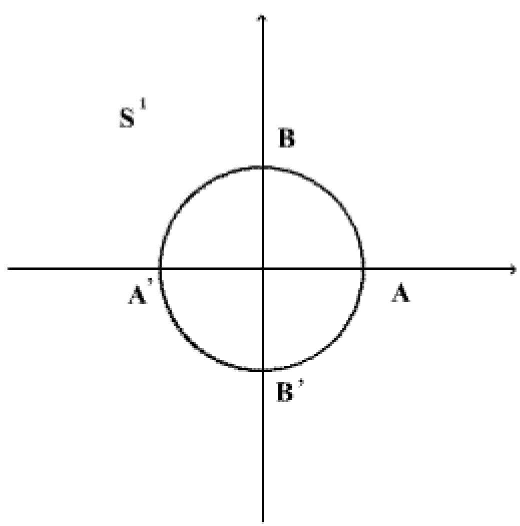


Figura 4

☞ A função de Euler consiste em envolver a reta R, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginado como um carretel) de modo que o ponto $0 \in R$ coincida com o ponto A de S^1.

Da correspondência feita até aqui entre os números reais e os pontos do círculo trigonométrico, se considerarmos o arco AP até uma volta, temos que mAP = t e $-2\pi \leq t \leq -2\pi$. Podemos , no entanto, estender a noção de medida para arcos com mais de uma volta, considerando $|t| > 2\pi$.

Seja $P = E(t)$ com $t \in R$, o arco AP e conseqüentemente o ângulo $A\hat{O}P$ mede t radianos (Figura 5) **.**

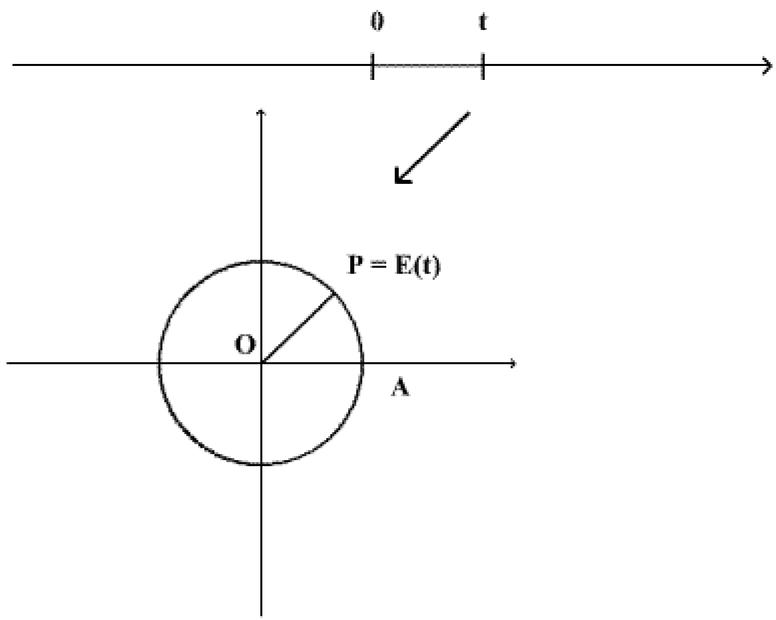


Figura 5

A função de Euler não é uma função injetora, isto é, a números reais distintos podem estar associados ao mesmo ponto no círculo trigonométrico. Por exemplo, $E(-\pi/2) = E(3\pi/2)$. Mais geralmente, tomando $t_1 > 0$ e mAP = t_1 , associados a P existem dois arcos com medidas e sentidos diferentes. Se mAP = t_1 (no sentido anti-horário) e mAP = t_2 (no sentido horário), ou seja $t_2 < 0$, temos que : $t_1 - t_2 = 2\pi$ e $E(t_1) = E(t_2) = P$.

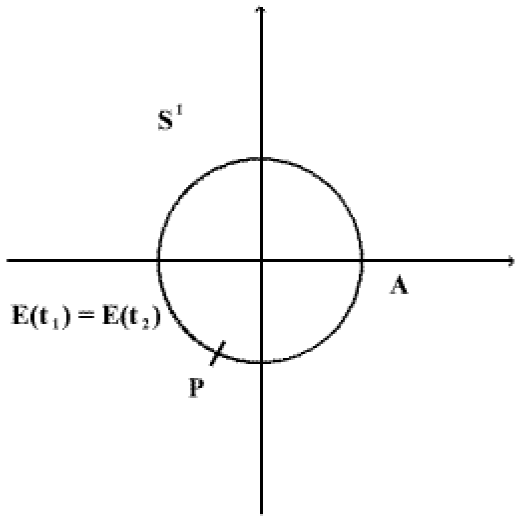


Figura 6

Se P é a imagem de t_o, P será também a imagem de $t_o \pm 2\pi$, $t_o \pm 4\pi$, etc..., ou seja, P é a imagem de todos os elementos do conjunto $\{t \in R\ ; t = t_o + 2k\pi, k \in Z\}$.

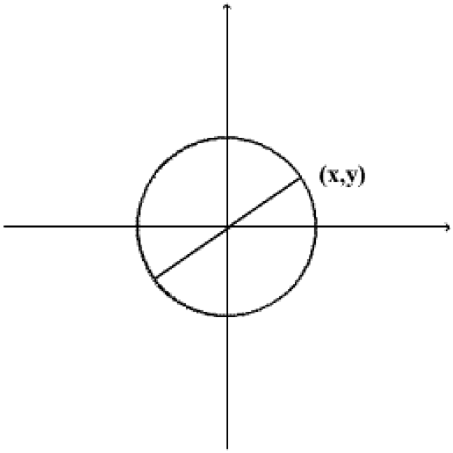
Dizemos, neste caso, que $t_o + 2k\pi$ são as várias "determinações" do arco AP, ou seja, todos os arco da forma $t_o + 2k\pi$ são *côngruos*, isto é, a diferença entre eles é um múltiplo de 2π. De fato:

$t_1 = t_o + 2k_1\pi$ e $t_2 = t_o + 2k_2\pi$ $k_1, k_2 \in Z$ têm a mesma imagem em S^1 se e somente se $t_1 - t_2 = 2k\pi$, $(k = k_1 - k_2)$

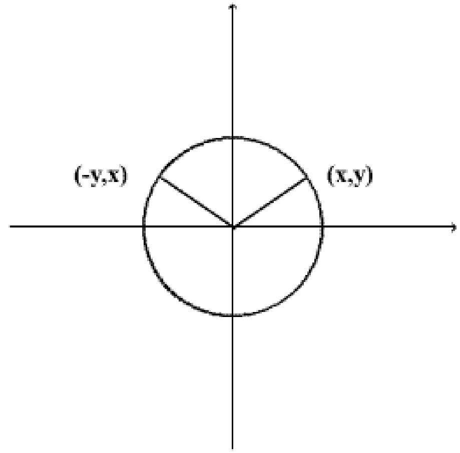
As vezes para facilitar a linguagem dizemos que t (número real) pertence ao 1º Quadrante. Estamos querendo dizer com isso que a extremidade P do arco AP tal que mAP = t é que pertence ao 1º Quadrante .

Finalmente, observando as figuras a seguir, obteremos diversas simetrias da função de Euler. Estas simetrias serão utilizadas para mostrar várias propriedades das funções seno e cosseno.

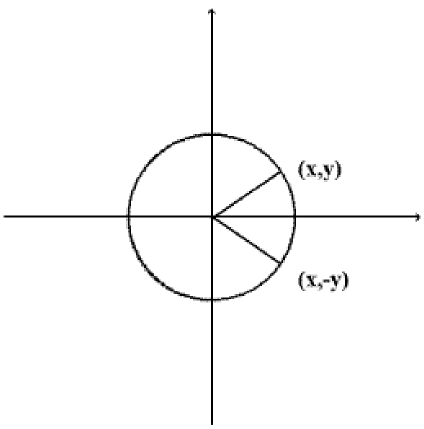
Dado $t \in R$, seja $P = E(t) = (x,y)$



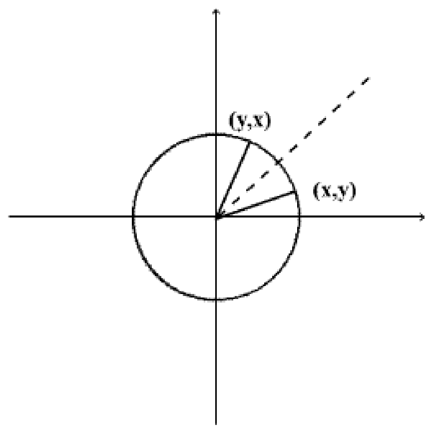
$$E(t+\pi) = (-x,-y)$$



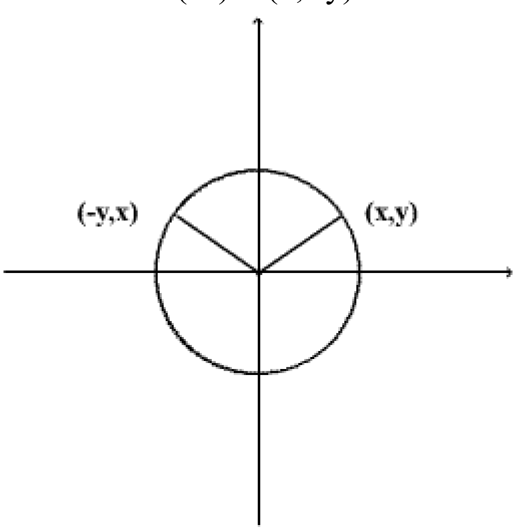
$$E(t+\frac{\pi}{2}) = (-y, x)$$



$$E(-t) = (x,-y)$$



$$E(\frac{\pi}{2}-t) = (y, x)$$



$$E(\pi - t) = (-x, y)$$

Figura 7