6. EXTENSÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos agora estender a noção de seno, cosseno e tangente , já conhecidas no triângulo retângulo, e portanto, para ângulos agudos, para ângulos e arcos quaisquer.

Dado um número real $t \in R$, seja $P = E(t) = (x,y)$ a sua imagem no círculo trigonométrico. Definimos *cosseno de t* e *seno de t*, respectivamente, como sendo *a abscissa* e a *ordenada de E(t)*. Isto é, $E(t) = (\cos t, \text{sen } t)$, para todo $t \in R$.

Assim, podemos definir as funções:

$$f_1: R \to R \qquad\qquad f_2: R \to R$$
$$t \to \cos t \qquad\qquad t \to \text{sen } t$$

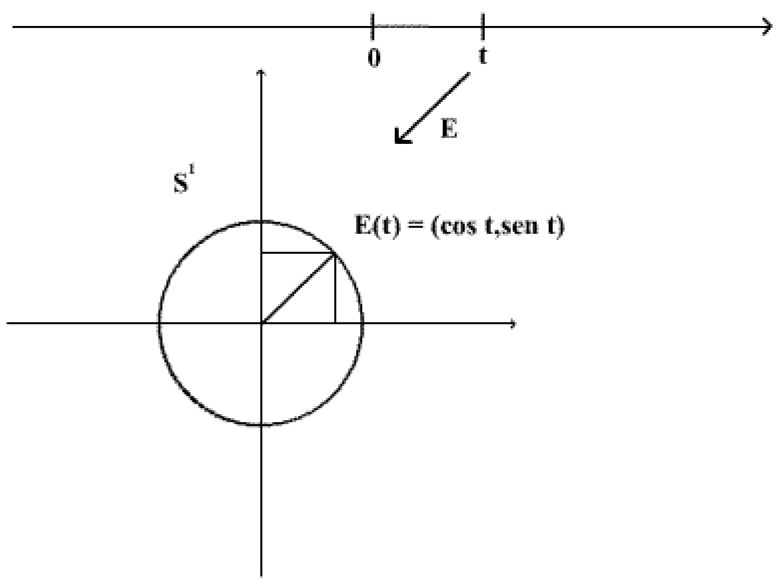

Figura 1

Mostra-se (veja figura 1) que a definição dada para o seno e cosseno de um número real qualquer coincide com a que tínhamos para um ângulo agudo. Como, para todo $t \in R$, temos $E(t) = (\cos t, \text{sen } t) \in S^1$, temos

$$\boxed{\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1}$$

ou seja, a relação fundamental está preservada.

Além disso,

$\cos 0° = \cos 0 = 1$ $\quad$ $\text{sen } 0^o = \text{sen } 0 = 0$

$\cos 90° = \cos \pi/2 = 0$ $\quad$ $\text{sen } 90° = \text{sen } \pi/2 = 1$

$\cos 180° = \cos\pi = -1$ $\quad$ $\text{sen } 180° = \text{sen}\pi = 0$

$\cos 270° = \cos 3\pi/2 = 0$ $\quad$ $\text{sen } 270° = \text{sen } 3\pi/2 = -1$

> ↳ A partir das definições dadas e da análise no circulo S^1 podemos deduzir todas as propriedades das funções sen t e cos t.

1. Domínio

- O domínio das funções sen t e cos t é R e a imagem é [-1,1].

2. Sinal das funções

- $\text{sen } t > 0$, se $t \in 1^{\underline{o}}$ e $2^{\underline{o}}$ quadrantes e $\text{sen } t < 0$, se $t \in 3^o$ e 4^o quadrantes.
- $\cos t > 0$, se $t \in 1^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes e $\cos t < 0$, se $t \in 2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.

3. Crescimento e decrescimento

- $y = \text{sen } t$ é crescente no $1^{\underline{0}}$ e $4^{\underline{0}}$ quadrantes e decrescente no $2^{\underline{0}}$ e $3^{\underline{0}}$ quadrantes,
- a função $y = \cos t$ é decrescente no $1^{\underline{0}}$ e $2^{\underline{0}}$ quadrantes e crescente no $3^{\underline{0}}$ e $4^{\underline{0}}$ quadrantes.

4. Paridade

Para todo $t \in R$, temos $E(t) = (\cos t, \text{sen } t)$ e $E(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$. Vimos anteriormente que se $E(t) = (x, y)$ então $E(-t) = (x, -y)$. Logo, para todo $t \in R$, tem-se

- $\cos(-t) = \cos t$. Isto é, a função cosseno é uma função par.
- $\text{sen}(-t) = -\text{sen } t$. Isto é, a função seno é uma função ímpar.

5. Periodicidade

↳ Uma função f: R → R é dita *periódica* quando existe um número T não nulo tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in R$. Quando isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in R$ e todo $k \in Z$. O menor número positivo tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in R$ é chamado de *período* da função f

As funções seno e cosseno são periódicas.

De fato, para $t \in R$, seja $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Como $E(t) = E(t + 2k\pi)$, para todo $k \in Z$, temos que $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos (t + 2k\pi), \operatorname{sen} (t + 2k\pi))$. Portanto, conhecendo-se o comportamento de sen t e cos t no intervalo $[0,2\pi]$ passamos a conhecer imediatamente o seu comportamento em todos os pontos de R.

A seguir temos os gráficos das funções seno e cosseno. O gráfico da função sen t é chamado de *senóide* (Figura 2) e como podemos verificar o gráfico de cos t (Figura 3) é apenas uma translação do gráfico de sen t.

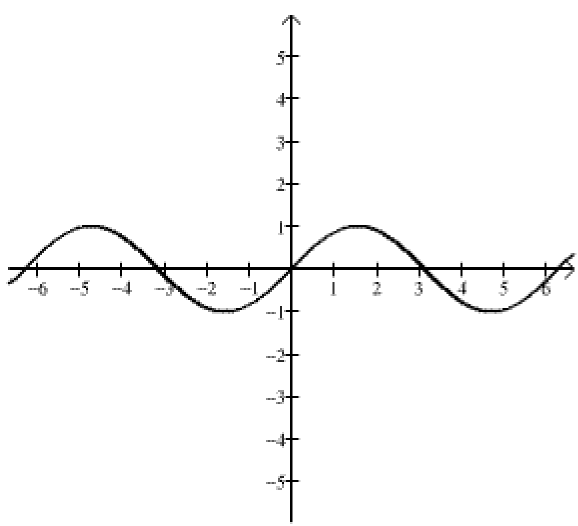

Figura 2

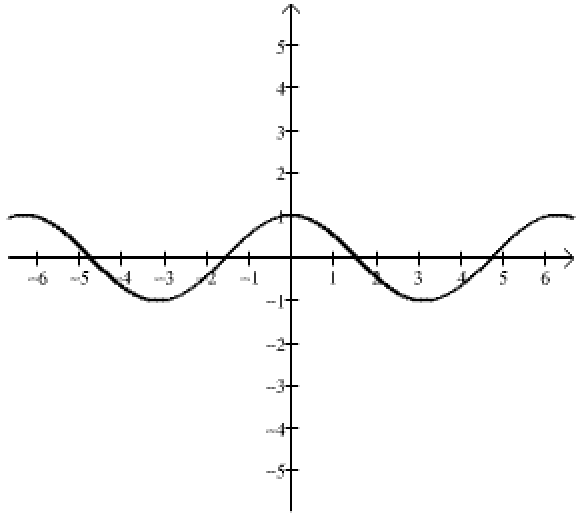

Figura 3

As relações obtidas no final da seção 5 (Figura 7) mostram que, para todo $t \in R$, valem:

$\cos(t + \pi) = -\cos t$,	$\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen}\, t$
$\cos(t + \pi/2) = -\,\text{sen}\, t$,	$\text{sen}(t + \pi/2) = \cos t$
$\cos(\pi/2 - t) = \text{sen}\, t$,	$\text{sen}(\pi/2 - t) = \cos t$
$\cos(\pi - t) = -\cos t$,	$\text{sen}(\pi - t) = \text{sen}\, t$

Quando definimos a tangente de um ângulo num triângulo retângulo (Figura 1), definimos:

$$\text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \text{tg}\hat{B} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$

Demos, portanto, uma definição algébrica e outra geométrica. O mesmo acontece quando definimos para arcos e ângulos quaisquer. Começaremos com a definição geométrica.

Dado $t \in R$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, seja $P = E(t)$. Considere a reta $0P$ e seja T a sua interseção com a reta tangente a S^1 em A (Figura 4). Definimos *tangente* de t como sendo a medida algébrica do segmento AT, ou em outras palavras, a ordenada de T no sistema cartesiano.

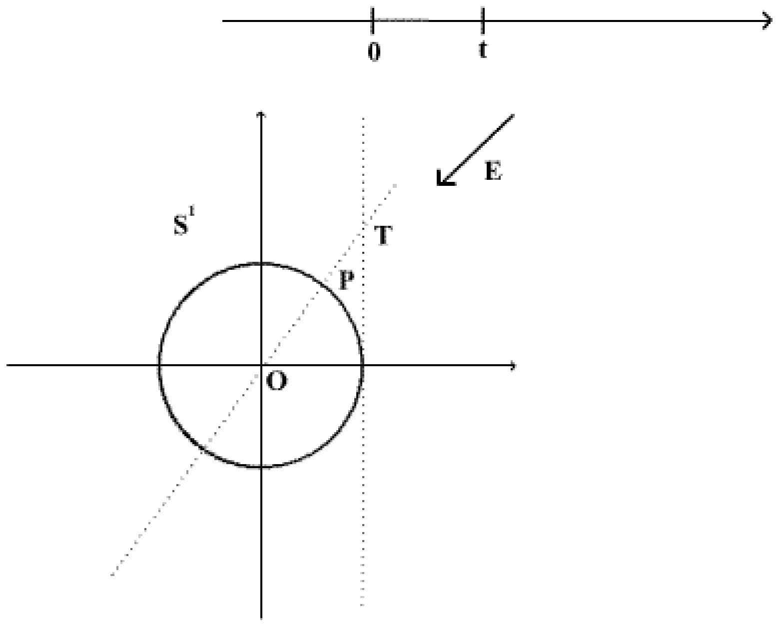

Figura 4

Do mesmo modo, como definimos as funções reais sen t e cos t, podemos definir:

$$f: \left\{ t \in R \; ; \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \; k \in Z \right\} \to R, \quad \text{onde } f(t) = \text{tg } t.$$

Observemos que, para $t = \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$, $P = E(t) = E(\pi/2)$ ou $P = E(t) = E(3\pi/2)$, logo a reta 0P fica paralela a reta tangente a S^1 em A. Neste caso, não existe ponto T, portanto a tg t não está definida.

A partir da interpretação geométrica da tangente e da análise no círculo S^1 podemos deduzir todas as propriedades da função tangente.

1. Imagem

- A imagem da função tangente é R.

2. Sinal da função

- tg t > 0, se $t \in 1^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.
- tg t < 0, se $t \in 2^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes.

3. Crescimento

- A função tg t é crescente em todos os intervalos da forma $(k\pi - \pi/2,\ k\pi + \pi/2)$.

4. Paridade

- A função tg t é ímpar
- 5. Periodicidade

A função tg t é periódica de período π: $tg(t + \pi) = tg\ t$.Com as informações obtidas construímos o gráfico da função tangente:

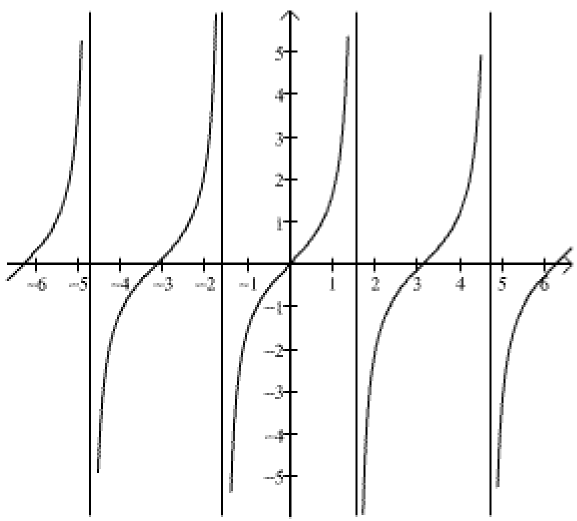

Figura 5

Mostraremos agora, que esta definição dada para tangente é igual a $tg\ t = \dfrac{sen\ t}{cos\ t}$, para $cos\ t \neq 0$, ou seja, $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\ \pi, k \in Z$. De fato, se $x = k\ \pi$, temos $tg\ t = 0 = \dfrac{sen\ t}{cos\ t}$ se $t \neq k\pi$ então $P = E(t)$ é diferente de A, B, A' e B', então temos que os triângulos $0PP_2$ e $0AT$ são semelhantes (Figura 6). Logo,

$$\frac{|AT|}{|0A|} = \frac{|P_2P|}{|0P_2|} \Leftrightarrow |tg\ t| = \frac{|sen\ t|}{|cos\ t|}$$

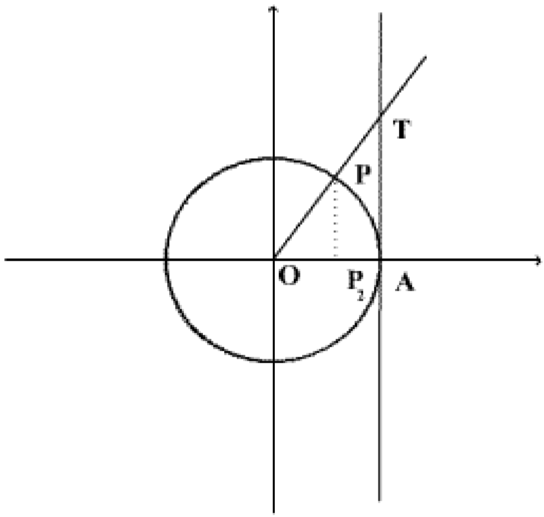

Figura 6

Analisando os sinais de tg t e $\dfrac{\text{sen } t}{\cos t}$ nos quatro quadrantes concluímos a nossa afirmação.

As vezes é conveniente se introduzir funções trigonométricas auxiliares como as funções $\dfrac{1}{\text{sen } t}$, $\dfrac{1}{\cos t}$, $\dfrac{\cos t}{\text{sen } t}$, chamadas cossecante, secante e cotangente de t, respectivamente. Observe que como estas funções são definidas por meio de quocientes, logo os seus domínios são restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero. Todas estas funções também podem ser definidas geometricamente.