8. AS FÓRMULAS DA ADIÇÃO DE DOIS ARCOS.

Vamos considerar fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e diferença de dois arcos quando são dadas as funções trigonométricas desses arcos.

Usaremos a fórmula da distância de dois pontos $P = (x_1 , y_1)$ e $Q = (x_2 , y_2)$ do plano,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

que segue imediatamente do teorema de Pitágoras (Figura 1).

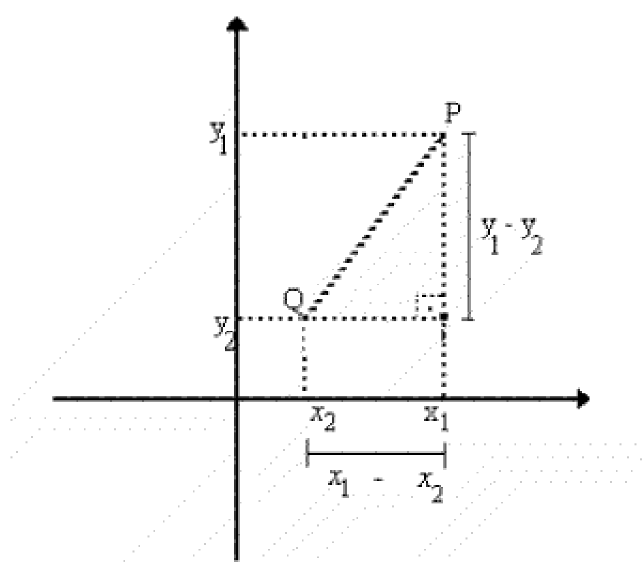

Figura 1

Deduziremos a seguir que

$$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b)$$

para quaisquer números reais a e b (1)

Considerando no círculo trigonométrico, o ponto $A = (1,0)$ e $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ tais que $P = (\cos(a), \text{sen}(a))$ e $Q = (\cos(b), \text{sen}(b))$ (Figura 2). Temos que

$$[\text{d}(P, Q)]^2 = (\cos(a) - \cos(b))^2 + (\text{sen}(a) - \text{sen}(b))^2 =$$

$$= [(\cos(a))^2 + (\text{sen}(a))^2] + [(\cos(b))^2 + (\text{sen}(b))^2] - 2\cos(a).\cos(b) - 2\,\text{sen}(a).\text{sen}(b).$$

Segue da relação fundamental da trigonometria que

$$[\text{d}(P, Q)]^2 = 2 - 2[\cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b)].$$

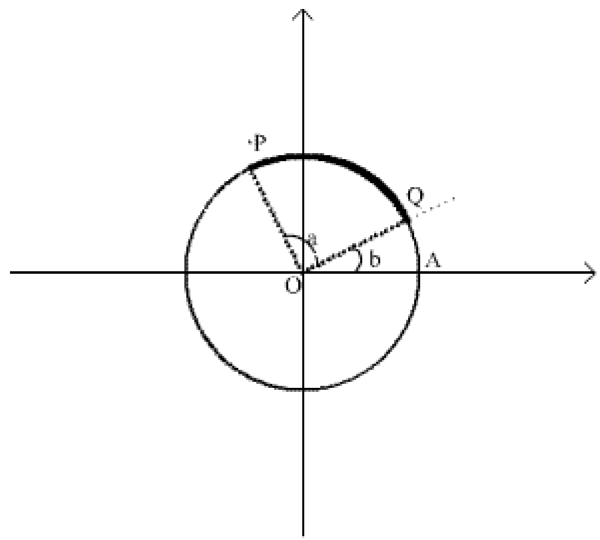

Figura 2

Vamos usar um novo sistema de eixos coordenados x'Oy': Mantendo a origem e girando os eixos de ângulo b (Figura 3). Neste novo sistema temos $Q = (1,0)$ e $P =$ (cos(a-b), sen(a-b)). Usando estas coordenadas para calcular a distância de P a Q obtemos

$$[\text{d}(P, Q)]^2 = (\cos(a-b) - 1)^2 + (\text{sen}(a-b))^2 =$$

$$= [(\cos(a-b))^2 + \text{sen}(a-b))^2] + 1 - 2\cos(a-b).$$

Donde

$$[\text{d}(P, Q)]^2 = 2 - 2\cos(a-b).$$

Das duas expressões obtidas para $[d(P, Q)]^2$ extraímos que

$$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b).$$

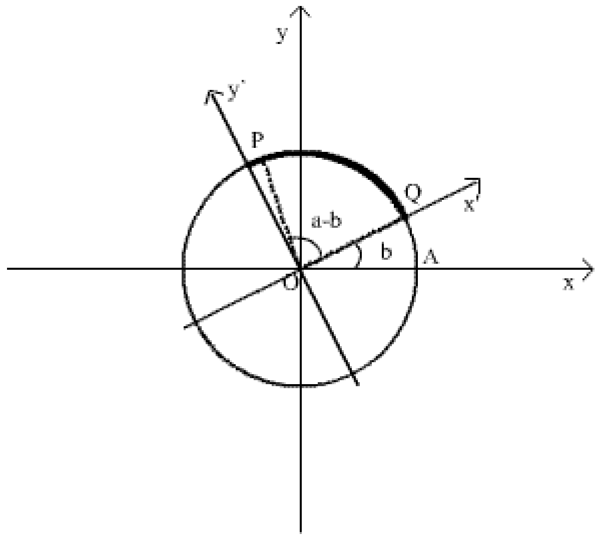

Figura 3

Exemplo:

Calculemos $\cos(15^o)$.

$$\cos(15^o) = \cos(45^o\text{-}30^o) = \cos(45^o).\cos(30^o) + \text{sen}(45^o).\text{sen}(30^o) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore \quad \cos(15^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Exercícios:

Nesta seção de exercícios deduziremos, juntamente com o leitor, algumas fórmulas que decorrem de (1).

1) a) Usando (1)①, deduza que

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \text{sen}(a).\text{sen}(b) \\ \text{para quaisquer números reais } a \text{ e } b\end{array}}$$ ② (2)

Sugestão: Inicialmente escreva que $\cos(a + b) = \cos(a - (-b))$ e aplique (1). Conclua, usando que $\cos(-b) = \cos(b)$ e $\text{sen}(-b) = -\text{sen}(b)$.

b) Calcule $\cos(75^o)$, usando (2).

2) Usando (1), deduza que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a).\cos(b) + \text{sen}(b).\cos(a) \\ \text{para quaisquer números reais } a \text{ e } b\end{array}}$$ (3)

Sugestão: Inicialmente use que $\text{sen}(a+b) = \cos(\pi/2-(a+b)) = \cos((\pi/2-a)-b)$ e aplique (1). Conclua, usando que $\cos(\pi/2-a) = \text{sen}(a)$ e $\text{sen}(\pi/2-a) = \cos(a)$.

3) a) Usando (3), deduza que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a).\cos(b) - \text{sen}(b).\cos(a) \\ \text{para quaisquer números reais } a \text{ e } b\end{array}}$$ ④ (4)

Sugestão: Faça de modo análogo à dedução de (2)②, isto é, aplique a $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a + (-b))$.

b) Se sen(a) = 4/5 e cos(b) = 3/5, sendo a um arco do 2º quadrante e b um arco do 1º quadrante, calcule sen(a -b).

4) Usando (2) e (3) , deduza que, para quisquer números reais a e b tais que a, b e $a + b$ são todos diferentes de $\pi/2 + k\pi$; para todo $k \in Z$, temos

$$\boxed{tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a).tg(b)}} \quad ⑤ \quad (5)$$

Sugestão: Inicialmente use que $tg(a+b) = \dfrac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$ e aplique (2) e (3)③ ao denominador e numerador respectivamente. Em seguida divida o numerador e denominador por cos(a).cos(b).

Usando as fórmulas vistas podemos obter as funções trigonométricas de a quando são conhecidas as funções trigonométricas de a/2.

5) a) Deduza as fórmulas (6) e (7) a seguir, usando respectivamente (2) e (3).

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a) = \cos^2(a/2) - \text{sen}^2(a/2)\\ \text{para qualquer número real } a\end{array}} \quad (6) \quad ⑥$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sen}(a) = 2.\text{sen}(a/2).\cos(a/2)\\ \text{para qualquer número real } a\end{array}} \quad (7) \quad ⑦$$

Sugestão: Use que $a = a/2 + a/2$

b) Se $\text{sen}(a) = 1/3$, calcule $\text{sen}(2a)$ e $\cos(2a)$.

A partir das últimas fórmulas vistas podemos apresentar as funções trigonométricas de um arco a como função de $\text{tg}\,(a/2)$.

6) a) Deduza as fórmulas (8), (9) e (10) a seguir usando as fórmulas (6) e (7).

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(a) = \dfrac{1 - tg^2(a/2)}{1 + tg^2(a/2)} \\ \text{para} \quad a \neq \pi + 2k\pi \end{array}} \qquad (8)⑧$$

Sugestão: Use (6) e a relação fundamental para escrever que $\cos(a) = \dfrac{\cos^2(a/2) - \text{sen}^2(a/2)}{\cos^2(a/2) + \text{sen}^2(a/2)}$, em seguida divida os termos do quociente por $\cos^2(a/2)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{sen}(a) = \dfrac{2tg(a/2)}{1 + tg^2(a/2)} \\ \text{para} \quad a \neq \pi + 2k\pi \end{array}} \qquad (9)$$

⑨

Sugestão: Use (7)⑦ e a relação fundamental para escrever que $\text{sen}(a) = \dfrac{2\,\text{sen}(a/2).\cos(a/2)}{\cos^2(a/2) + \text{sen}^2(a/2)}$, em seguida divida os termos do quociente por

$\cos^2(a/2)$.

$$tg(a) = \frac{2tg(a/2)}{1-(tg(a/2))^2}$$
para $a \neq \pi/2 + k\pi$ e $a \neq \pi + 2k\pi$ (10)

Sugestão: Use que $tg(a) = \dfrac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$ e as fórmulas (8) e (9).

Temos ainda as fórmulas seguintes que transformam produto em soma e que são válidas para quaisquer números reais a e b.

7) a) Deduza as fórmulas a seguir usando (1) e (2)②

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad (11)$$

Sugestão: Some as equações:

$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b)$

$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \text{sen}(a).\text{sen}(b)$.

$$\text{sen}(a).\text{sen}(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \qquad (12)$$

Sugestão: Subtraia as equações acima.

b) Deduza a fórmula a seguir usando (3) e (4)

$$\boxed{\operatorname{sen}(a).\cos(b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{2}} \qquad (13)$$

Sugestão: Some as equações

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a).\cos(b) + \operatorname{sen}(b).\cos(a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a).\cos(b) - \operatorname{sen}(b).\cos(a)$$